FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE.*

Tomus IX.

AD ANNVM MDCCXXXVII.



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE.
cIↄIↄccxLIV.

LIBRARY OF THE AMERICAN MUSEUM OF NATURAL HISTORY
5.06(4
BIBLIOTHECA GYMNASII ARNSTADIENSIS
4/14/1916 / colla

16.70259 april 28

LIBRARY
OF THE
AMERICAN MUSEUM
OF NATURAL HISTORY

ELISABETHAE
PRIMAE
RVSSORVM IMPERATRICI
ET AVTOCRATORI
CETERA, CETERA, CETERA.

SACRVM.

QVod TVVM *eſt* DOMINA, *literarum et bonarum artium in Ruſſia nouum incrementum, eiusque argumentum certiſſimum, Tomum hunc nonum Commentariorum Academicorum,* TE

ſeliciter imperante in lucem editum, TIBI *animo deuotiſſimo reddimus,* TIBI *more antiquo dedicamus.*

Haud facile vnquam ſpes maior noſtris excitata Muſis eſt illa, qua TV *in faſtigio, benigniſſimum ſidus Imperii et Muſarum diuque ad reſtituendas res expectatum, effulſiſti, ſplendore* TVO *omnia exhilaraſti, vitamque et animum bonis omnibus reddidiſti.*

Itaque TIBI, AVGVSTISSIMA IMPERATRIX, *conſummationem operis paterni Numen reſeruare voluiſſe videtur,* TIBI, MAGNI PARENTIS, FILIAE MAGNAE, *quae virtute plus quam virili inſtructa, a Deo excitata, a populo vniuerſo expetita, mira quin miranda nunquam ſatis fortitudine, Imperium paternum repetiiſti ac vix illud adepta, victoriis ampliaſti, gloriaque trium-*

triumphorum adaucta, pacem populo TVO *et vicino donaſti, requiem Imperio et ſecuritatem temporibus etiam futuris ſtabiliiſti, Dulciſſimo* PETRI MAGNI *Nepote, qui* TIBI *in Imperio ſuccederet arceſſito, et Principi incomparabili, Magnae Duci Catharinae Alexeidi, quae* TIBI *populoque* TVO *in deliciis eſt, deſponſato. Quid, quod collapſa quaecunque bona inſtauras, noua addis, in* TVIS *erga* TE *amorem* TIBI *concilias, reliquos per vniuerſum orbem in admirationem* TVI *rapis et ad mentem* MAGNI PARENTIS, *magna quaeuis paras, incepta perficis. vbique exemplum eius immortale ſequeris, adeoque Illum Ipſum tanquam reducem in terris, exemplo* TVO, *ſiſtis. Haud quoque ita pridem benigniſſima lege lata, ſolatium et ſpem artium et ſcientiarum cultoribus non ſolum ampliorem addidiſti, ſed*

exte-

exteris etiam laborum noſtrorum ſociis, annua ſtipendia continuari iuſſiſti.

Quid igitur a TE, TVA*que prouidentia, cuius acumen nihil ſubterfugit, et nobis ſperare non licet, qui iuſſu et auctoritate* TVA *in excolendis et docendis bonis artibus operam nauamus,* TVA*que benigniſſima voluntate ſuffulti, ad vtilitatem publicam et ad emolumentum et gloriam Imperii* TVI, *quantum licuerit, conferre nunquam deſiſtimus.*

Adiuua itaque nos DOMINA, *noſtrosque labores et vigorem Academiae, ſumma cura ab immortali* PATRE TVO *fundatae, auctae ab Auguſtiſſima* MATRE, *beneficio* TVO *ſuſtenta!* TE *autem adiuuet* DEVS, *ſummus rerum arbiter, diuque ſaluam conſeruet et ſoſpitem, et quod prorſus excellens in* TE *eſt, animi excelſi decus, quo indies*

dies magis magisque exſplendeſcis, ſero repetat ſibi, vt auſpiciis TVIS *Imperii ſalus immota conſtet nouisque effloreſcat incrementis. Ita feruido et ſincero animo vovet*

IMPERATORIAE TVAE MAIESTATI

Petropoli, Calend. Octob.
A. cIↄIↄCCXLIV.

deuotiſſima
Academia Scientiarum.

INDEX COMMENTARIORVM.

* * *

Commercium Epiſtolicum Regiae Hiſtoriae Luſitanae Academiae cum Academia Petropolitana.

* * *

In Claſſe Mathematica.

Ioh. Bernoullii Diſſertatio Hydraulica de motu aquarum per vaſa aut per canales, quamcunque figuram habentes, fluentium. pag. 3.

L. Euleri de communicatione motus, in colliſione corporum, ſeſe non directe percutientium. p. 50.

G. W. Krafftii Specimen Algebrae ad Architecturam militarem applicatae. p. 77.

L. Euleri, de Conſtructione Aequationum. p. 85.

Eiusdem de Fractionibus continuis. p. 98.

F. Moula, de maximis in figuris rectilineis. p. 138.

L. Euleri Variae obſeruationes circa ſeries infinitas. p. 160.

Dan. Bernoullii, de variatione motuum a percuſſione excentrica. p. 189.

L. Euleri Solutio problematis geometrici circa lunulas a circulis formatas. p. 207.

Eiusdem de variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. p. 222.

In

In Claſſe Phyſica.

G. W. Krafftii de Thermometris Diſſertatio Experimentalis. p. 241.

I. Weitbrechtii Obſeruationes Anatomicae ad hiſtoriam et actionem muſculorum, labiorum, oſſis hyoidis, faucium linguae, laryngis pertinentes. p. 249.

Eiusdem Obſeruata in ſectione iuuenis 1735. cuius manus et pedes monſtroſi erant. p. 269.

Eiusdem Explicatio difficiliorum experimentorum circa aſcenſum aquae in tubos capillares. p. 275.

I. Ammani de Alſinanthemo Thalii, ſeu trientali herba Ioh. Bauhini. p. 310.

Eiusdem de Betula pumila, folio ſubrotundo. p. 314.

G. W. Krafftii Obſeruationum meteorologicarum ab anno 1726. vsque in finem anni 1736. factarum, comparatio, praelectio prima. p. 316.

Eiusdem ——— Praelectio ſecunda. p. 344.

Eiusdem Obſeruationes Meteorologicae anno 1737. inſtitutae. p. 358.

In Claſſe Hiſtorica.

T. S. Bayeri Geographia Ruſſiae vicinarumque regionum, circiter annum Chriſti DCCCCXLVIII. ex Conſtantino Porphyrogenneta. p. 367.

Obſeruatio Aſtronomica.

G. Heinſii, Obſeruatio Eclipſis Lunaris d. 8. Sept. 1737. ſt. n. Petropoli habita. p. 425.

* * *

IAm plus quinque annorum eſt quum tria noſtrorum Commentariorum volumina et alios quosdam libellos Petropoli confectos ad Regiam Hiſtoriae Luſitanae Academiam mittebamus, quae tam humaniter atque benigne a Viris illis praeſtantiſſimis excepta fuere vt ſpem noſtram omnem vicerint, quando praeter honorificum reſponſum et plurima ab Academicis Luſitanis edita opera quae nobis dono miſerant, negotium dederunt Excellentiſſimo Comiti da Ericeira vt librorum noſtrorum epitomen * concinnaret, quae quum hoc ipſo anno ad manus noſtras peruenerit non differendum putauimus grati animi aduerſus tanta beneficia teſtimonium, quod publice ab omnibus noſtrarum rerum ſtudioſis legeretur, quam ob rem exemplo Academicorum Luſitanorum, qui epiſtolas vltro citroque miſſas ei epitomae inſeri curauerunt, easdem hic repetere, poſtremas etiam noſtras atque indicem librorum nobis donatorum, quod eos

* Extractos Academicos dos livros que a Academia de Petersburg mandou à de Lisboa feitos por ordem da mesma Academia pelo Conde da Ericeira, D. Francisco Xavier de Menezes Hum dos ſeus Directores, e Cenſores, do Conſelho de Guerra, Meſtre de Campo General dos Exercitos de Sua Mageſtade, e Deputado dos Tres Eſtados do Reyno, etc. Lisboa Occidental M. DCC. XXXVIII. in 4to.

in Germania et finitimis regionibus adhuc parum cognitos putamus, addere viſum fuit.

Nos quidem ſatis mirari non potuimus induſtriam et multiplicem ſolidamque eruditionem Excellentiſſimi Comitis da Ericeira, qui dum noſtra ſpecimina recenſuit in tam diuerſis rerum argumentis non ſolum inoffenſo pede proceſſit, ſed ſuas quoque obſeruationes egregias identidem ſubiunxit, vbique vero ita nobiscum egit vt facile appareat nos in iudicem indulgentiſſimum incidiſſe, qui nec tenuia ſperneret, et quae tolerabilia eſſent non modo non extenuaret, ſed magnis etiam laudibus efferret, nihil ſane illa Excellentiſſimi Viri agendi ratione praeſtabilius, nihil efficacius eſt ad excitanda eorum ingenia qui in ſtudiis non publici ſaporis verſantur atque in hoc genere ad aliquam laudem contendunt.

Sed inter omnes qui magni huius Viri et totius Academiae Hiſtoriae Luſitanae dignitatem, doctrinam et merita in patriam penitius intuentur, poteſtne quisquam eſſe tam a litterarum ſtudiis alienus aut omnis humanitatis expers atque ignarus, quin Regis Luſitanorum IOANNIS V. fortitudinem atque ſapientiam veneretur, qui toto regni ſui tempore terra marique inclitus, claſſes Luſitanas tum Venetis tum Perſis ſubſidio miſit, Monbacciam recepit, Afros praedones in fugam egit, Sicarios ſeueris legibus ſuſtu-

ſuſtulit, immenſis opibus ex India aduectis Populum ditauit, magnam praeterea argenti vim in egenos diſtribuit, iuuentutem militaribus diſciplinis inſtitui iuſſit, pacem, aſpero tempore atque ad bellum ſpectante rerum ſtatu, ſumma prudentia ſuſtentauit, celebriores artifices praemiis propoſitis Vlyſſipponem arceſſiuit, bibliothecam libris rariſſimis mirifice auxit, Hiſtoriam denique Luſitanam, cui temporis longinquitas detrimentum attulerat, Illuſtris illius Academiae Collegis tractandam demandauit, digniſſimis certe qui non modo antiqua Luſitaniae monumenta in lucem protrahant, ſed quorum praecipue cura ſtudio atque diligentia rerum tanti Regis auſpiciis geſtarum fama poſteritati propagetur.

A. 1740. d. 23. Sept.

C. G.

Litterae ad Academiam Regiam Hiſtor. Luſit. miſſae A. 1735. d. 7. Iulii.

EXCELLENTISSIMIS, ILLVSTRISSIMIS ATQVE PRAESTANTISSIMIS

REGIAE ACADEMIAE VLYSSIPPONENSIS COLLEGIS

S. D.

IOANNES ALBERTVS KORFF
SERENISSIMAE RVSSORVM IMPERATRICIS CAMERARIVS REGENDAE ACADEMIAE PETROPOLITANAE PRAEFECTVS.

ETſi iam a pluribus annis de Regia Vlyſſipponenſi Academia eiusque meritis ſama ad nos peruenit, tamen praeter longinquitatem loci varia nobis impedimenta obſtiterunt, quo minus aliquid opuſculorum noſtrorum teſtandae erga Vos obſeruantiae cauſa tuto mittere poſſemus; cum vero nuper Vir Clariſſimus Antonius Ribeira Sanches, Veſtras, qui hic artem medicam feliciter et cum magna laude exercet, operam ſuam in curandis ad Vos litteris et libris quos mitteremus liberaliter pollicitus eſſet, hanc

hanc occaſionem ſine mora arripiendam duximus. Non quidem nos fugit Academiae Veſtrae, quae in Hiſtoriarum Luſitaniae monumentis ſcrutandis occupatur, diuerſum ab eo inſtitutum eſſe quod nos tenemus, quibus et Matheſin et Phyſicam et Hiſtoriam ſeu Antiquitatis ſtudium colere, et, quae in his doctrinis iam aliorum ingenio eruta fuerant, quoad eius fieri poteſt, noſtra induſtria proferre atque amplificare incumbit; verum enim vero quando omnium artium ac diſciplinarum quaedam inter ſe ſocietas, communio et cognatio eſt, non dubitamus quin commercium litterarum, quod Vobiscum inſtituere cupimus, quemadmodum nobis perhonorificum eſt, ita communiter vtile futurum ſit, nos vero in iis rebus in quibus Veſtro Collegio inſeruire poterimus curam omnem atque diligentiam adhibituri a Vobis id viciſſim petimus, vt hanc noſtram voluntatem noſtraque in Vos ſtudia, quae ſumma ſunt, aeque bonique conſulatis. Valete. Nonis Iulii A. cIↄIↄccxxxv.

Index Librorum

ad Acad. Reg. Luſit. miſſorum.

Commentar. Academiae Scientiarum. Tom. I. II. et III. in 4to.

Plantarum minus cognitarum Centur. I. II. III. compleċt. Plantas circa Byzantium et in Oriente obſeruatas per I. C. Buxbaum, Acad. Sc. Soc. Petrop. 1730. in 4to.

T. S. Bayeri Hiſtoria Osrhöena et Edeſſena ex nummis illuſtrata. 1735. in 4to.

Sermones Academici in publico Conuentu habiti. 1725. et 1729. in 4to.

Abregé des Mathematiques pour l' vſage de Sa Maj. Imp. de toutes les Ruſſies. Tom. I. II. III. à St. Pet. 1728. in 4to.

T. S. Bayeri Muſeum Sinicum, in quo Sinicae Linguae et Litteraturae ratio explicatur. in 8vo.

Parerga Medica conſcripta a Damiano Sinopeo, Medico Ordinario Marini Noſocomii Cronſtadienſis. 1734. in 8vo.

Litte-

Litterae ab Acad. Reg. Luſitana ad Petropolitanam miſſae A. 1736.

EXCELLENTISSIMIS, ILLVSTRISSIMIS, ATQVE PRAESTANTISSIMIS

ACADEMIAE PETROPOLITANAE COLLEGIS

CENSORES ACADEMIAE REGIAE HISTORIAE LVSITANAE REGENDAE PRAEFECTI

VTRAMQVE FELICITATEM.

L*Itterae, quas ad Nos dediſtis, quibusque vrbanitatem, comitatemque noſtram primi laceſſitis, tantae humanitatis atque elegantiae plenae erant, vt exiſtimationem Veſtram apud Nos magno cumulo auxerint. Iis enim plane docemur, praeclaros illos rumores, quos de Societate Petropolitana, etſi non dubios, fama vulgauerat, maiores tamen atque praecellentiores eſſe, quam vt à quoquam percipi, menteue comprehendi quirent. Quapropter Clariſſimo Viro Antonio Ribeyra Sanches noſtrati non agere gratias non poſſumus, qui ſedulitate ſua tam magni tamque prolixi itineris ſpatium, quo Vlyſſipo noſtra ab iſta Petropoli ſeiungitur, haud formidans, non Epiſtolam tantum*

tantum Veſtram, ſed et libros ad Nos perferendos ſuſcepit. Quod vtrumque peregregium ſane munus, quanti fecerimus, ne vnis Vobis pateſceret, in pleno Academiae Noſtrae conſeſſu decretum eſt, vt Librorum Epitome quam breuiſſima ab Excellentiſſimo Comite da Ericeyra, vno e Quinqueviris noſtris, conficienda, ſimul cum Epiſtola Veſtra Academicis typis traderetur, vt praeclaro illo ſpecimine, cùm eximiam eruditionem Veſtram, tum gratitudinem noſtram coram omnibus teſtaremur. Quin et Illuſtriſſimo ſcrinii noſtri Magiſtro iniunctum eſt, vt opera a quibusdam Sociis noſtris vsque ad hanc diem edita, ad Vos mittenda curaret, quae quidem ſi forte a Vobis laudari, probariue contingat, nullum profecto maius, digniusue praemium laboris ſui eorum Authores expetituros eſſe arbitramur. Quod vero litterarum commercium nobiscum inſtituere tam vehementer cupitis, Nobis rem perquam gratam, perquam iucundam facitis, imo iam currentibus Nobis calcar additis, quippe quibus nihil ſuauius, nihil honorificentius accidere poſſit, quam Vos per litteras frequenter adire, Virosque omni doctrinarum genere inſtructiſſimos, de dubiis noſtris, ſi qua occurrent (occurrent autem bene multa) conſulere. Neque enim ſentire vobiscum poſſumus in eo quòd putatis inſtitutum Petropolitanae Academiae, quae tota in erudito puluere Mathematicorum atque Phyſicorum verſatur, ab inſtituto Luſitanae, quae in ſtudio conſcribendarum Hiſtoriarum incumbit, quam longiſſime abhorrere, cum potius è contrario mire inter vtramque

vtramque conueniat. Scitis enim vt Hiſtorici in memorandas res ab hominibus geſtas ſe totos conferunt, ita Phyſicos atque Mathematicos omnibus viribus atque opibus elaborare, vt res in caelis atque in terris a Deo praeclariſſimè factas accuratè deſcribant. Illud igitur a Vobis petimus, atque maiore ſtudio rogamus, vt nullam non occaſionem arripiatis ſcribendi ad Nos, par pari quam ocyſſime, quamque libentiſſime relaturos. Valete Academici Sapientiſſimi, atque è Veſtra Petropoli, non Ruſſis tantum, ſed et orbi vniuerſo, pergite, vt facitis, ad inſcientiam propulſandam, facem praeferre. Ipſis eidibus Decembribus A. MDCCXXXVI. Vlyſſipone Occidentali.

Marchio de Valença. Antonius dos Reys.

D. Didacus Fernandes de Almeyda. Comes Aſſumarenſis.

Comes da Ericeira. Nonius Silvius Tellezius.

Index Librorum
huc miſſorum.

IN FOLIO.

(1) Expeditio Hiſpanica Apoſtoli S. Iacobi Maioris aſſerta, et ex S. Paulo Apoſtolo confirmata, Diſſertatio Hiſtorico-Critica, acceſſere Appendices tres:

I.) De aede Caeſar-Auguſtana a Columna dicta per Sanctum Iacobum conſtructa.

II.) De grauiſſima authoritate Breuiarii Romani.

III.) Sylloge Authorum omnium gentium omniumque Ordinum qui expeditionem Hiſpanicam S. Iacobi Maioris aſſerunt: Authore Emmanuele Caietano Souſa, Clerico Regulari, Regiae Maieſtati a Conſiliis, Bullae Sanctae Cruciatae Pro-Commiſſario Generali Apoſtolico et Regalis Academiae Quinqueviro Cenſore. Vlyſſ. MDCCXXVII. 2. Tom.

(2) De vita et rebus geſtis Nonni Alvareſii Pyreriae Luſitaniae Comitis-Stabilis Libri duo. Auctore Antonio Roderico Coſtio, Regiae Academiae Socio. MDCCXXIII. Tom. I.

(3) Colleçaõ dos Documentos, Eſtatutos e mais Memoiras da Academia Real da Hiſtoria Portugueza que neſte anno de 1721.—1733. ſe compuzeraõ e ſe imprimiraõ per ordem de ſeus Cenſores, E Orde-

Ordenado pelo Marquez de Alegrete Manoel Telles da Sylva Secretario da mesma Academia. 14. Tom.

IN QVARTO.

(1) Hiſtoria da Academia Real da Hiſtoria Portugueza, compoſta por Manoel Telles da Sylva Marquez de Alegrete, Secretario da mesma Academia. Tomo Primeiro. MDCCXXVII.

(2) Memorias Para a Hiſtoria Eccleſiaſtica do Biſpado da Guarda escrita Pelo Doutor Manoel Pereira da Sylua Leal, I. C. Vlyſſipponenſe, Collegial do Collegio Pontificio de S. Pedro na Vniverſidade de Coimbra, Cavalleiro da Ordem de Chriſto, e Academico da mesma Academia Real. Tomo Primeiro MDCCXXIX.

(3) Memorias Para a Hiſtoria Eccleſiaſtica do Arcebispado de Braga Primaz das Heſpanhas eſcritas pelo Padre D. Ieronymo Contador de Argote, Clerigo Regular, Academico da mesma Academia. Titulo I. Da Geografia do Arcebispado Primaz de Braga, e da Geografia antiga da Provincia Baracarenſe MDCCXXXII. 2. Tom.

(4) Apparato para a Diſçiplina, e ritos Eccleſiaſticos de Portugal: na qual ſe trata da origem, e fundaçaõ dos Patriarchados de Roma, Alexandria, e Antiochia, o ſe deſcreue com eſpecialidade e Patriarchado do Occidente, moſtrando que as Igre-

jas de Hespanha lhe pertenciaõ por direito particular &c. Pelo ſeu Author, D. Franciſco de Almeyda, Academico da Academia Real Portugueza. Lisboa Occidental. 1735. 3. Vol.

(5) Hiſtoria Genealogica Da Caza Real Portugueza Desde a ſua Origem atè o Preſente, com as Familias Illuſtres, que procedem dos Reys e dos Sereniſſimos Duques da Bragança, por D. Antonio Caetano de Souſa Clerigo Regular, e Academico do Numero da Academia Real. MDCCXXXV. 2. Tom.

(6) Memorias Para a Hiſtoria de Portugal, que comprehendem o Governo del Rey D. JOAÕ I. Do Anno de mil e trezentos e oitenta e tres, atè o anno de mil e quatrocentos e trinta e tres, escritas pelo Academico Ioſeph Soares da Sylua. MDCCXXX. XXXI. XXXII. XXXIV. 4. Tom.

(7) Catalogo Chronologico, Hiſtorico, Genealogico, e Critico das Rainhas de Portugal, e Seus Filhos Ordenado por D. Ioze Barboſa, Clerigo Regular, Academico Real da Hiſtoria Portugueza, e Chroniſta da Sereniſſima Caſa de Bragança. MDCCXXVII. 1. Tom.

(8) Geografia Hiſtorica de todos os Eſtados Soberanos de Europa Com as mudanças, que houve nos ſeos dominios, eſpecialmente pelos tratados de Vtrecht, Raſtad, Badden &c. Com as Genealogias das Cazas Reynantes, e outras mui principaes. Compoſta por

por D. Luis Caetano de Lima Clerigo Regular Lisboa Occidental 1734. 2. Vol.

(9) Memorias da Ordem Militar de S. IOAÕ de Malta. Por Fr. Lucas de S. Catharina da Ordem dos Pre'gadores, ſeu Chroniſta, e Academico da Academia Real. Tomo Primeiro MDCCXXXIV.

(10) Supplemento Hiſtorico ou Memorias e Noticias da Celebre Ordem dos Templarios, Para a Hiſtoria da admiravel Ordem de Noſſo Senhor Jeſu Chriſto eſcrito por Alexandre Ferreira Natural da Cidade de Porto, Doutor Graduado na Faculdade de Leys pela Vniverſidade de Coimbra &c. MDCCXXXV. 2. Tom.

IN OCTAVO.

(1) Tradado do modo o mais facil e o mais exacto de fazer as Cartas Geograficas, aſſim da Terra, como do mar, e tirar as plantas das Praças, Cidades, e edificios com inſtrumentos e ſem inſtrumentos, para ſervir de inſtrucçam a fabrica das Cartas Geograficas, da Hiſtoria Eccleſiaſtica e Secular de Portugal, Tirado dos melhores Authores, e compoſto por Manoel de Azevedo Fortes, Academico da Academia Real da Hiſtoria, Cavalleiro Profeſſo na Ordem de Chriſto, Brigadeiro de Infanteria dos Exercitos de Sua Mageſtade, que Deos guarde, e Engenheiro mor do Reyno MDCCXXII.

EXCELLENTISSIMIS, ILLVSTRISSIMIS ATQVE PRAESTANTISSIMIS ACADEMIAE REGIAE HISTORIAE LVSITANAE PRAEFECTIS

S. D.

Carolus de Brevern

SERENISSIMAE RVSSORVM IMPERATRICIS CONSILIARIVS STATVS, ACADEMIAE PETROPOLITANAE PRAESES, ORDINIS S. ALEXANDRI NEVENSIS EQVES.

Quae Vobis ante hos quinque annos Vir Illuſtris Ioannes Albertus de Korff reddenda curauerat commentariorum noſtrorum volumina, non ſolum perhumaniter accepta fuiſſe ex litteris Veſtris iam diu intelleximus, ſed nuper etiam ſingulari atque inopinato beneficio nos obligatos agnouimus, quum V. C. Antonius Ribeyra Sanches Imp. Domus Medicus librum nobiscum communicaret, quo Excellentiſſimus Comes da Ericeira commentarios illos articulatim ita recenſuit, vt nihil quod ad laudem commendationemque noſtrae qualiscunque diligentiae pertinere poſſet, omitteret; quam ob rem tam propenſae erga nos voluntatis indicia

indicia digna iudicaui, quae IMPERATRICI *et* AVTOCRATORI *noſtrae Clementiſſimae nunciarem, cuius nomine atque iuſſu maximas nunc Vobis gratias ago. Etſi vero linguae Luſitanae inſcitia nos impedit quo minus in legendis et examinandis plerisque libris quos ab Illuſtri Veſtra Academia accepimus, ſimilem curam adhibeamus, tamen gratum animum, quo Veſtram beneuolentiam proſequimur, commentarii noſtri prope diem publice teſtabuntur: Maximum denique fructum non modo tunc cepiſſe videbimur, quum ſuffragiis Veſtris nos ornaueritis, verum etiam quotiescunque in obſcuro ac perplexo itinere, quod abdita doctrinarum veſtigantibus ingrediendum eſt, aberrantes reduxeritis in viam; vtraque igitur ratione conatus noſtros mirum in modum adiuuabitis, quod vt faciatis, Vos vehementer etiam atque etiam rogamus. Dab. Nonis Sept. A.* cIↄIↄ CCXL. *Petropoli.*

Carolus de Brevern.

Chriſtianus Goldbach. Iohan. Daniel Schumacher.

Index.

Index Librorum

ad Acad. Reg. Luſit. miſſ.

Commentar. Acadamiae Scientiarum Petropol. Tom. IV. V. et VI.

Bayeri de Horis Sinicis et Cyclo Horario Commentationes. Accedit eiusdem Auctoris Parergon Sinicum de Calendariis Sinicis. in 4to.

Eiusdem Hiſtoria Regni Graecorum Bactriani. Accedit Chriſtophori Theodoſii Waltheri Doctrina Temporum Indica cum Paralipomenis. in 4to.

Buxbaumii Plantarum minus cognitarum circa Byzantium Centur. IV. et V.

Euleri Mechanica ſiue Motus Scientia analytice expoſita. Tom. I. et II. in 4to.

Eiusdem Tractatus Philoſophicus de Muſica tam antiqua quam hodierna. in 4to.

De L'Isle Memoires pour ſervir a l'Hiſtoire & aux progrès de l'Aſtronomie, de la Geographie & de la Phyſique. in 4to.

Ammani Icones Stirpium rariorum in Ruthenorum Imperio ſponte prouenientium. in 4to.

Krafftii Breuis Deſcriptio Experimentorum Phyſicorum, in vſum Auditorum ſuorum. in 8vo.

Oratio Statuum Ruſſiae ad Imperatricem. Ruſſice Lat. Gall. et Germ. in 4to.

Effigies S. Imp. Maj. aere expreſſa

DVO-

DVORVM LIBRORVM
HVC MISSORVM
SYNOPSES
EX DIARIO ACAD. d. 4. et 18. Sept. A. 1738.

IN libris quos Academia Regia Luſitana Societati noſtrae dono dedit, non niſi duo ſunt latine ſcripti; alterius titulus eſt:

Expeditio Hiſpanica Apoſtoli S. Iacobi Maioris, aſſerta authore Emmanuele Caietano Souſa Clerico Regulari Regiae Maieſtati a Conſiliis, Bullae Sanctae Cruciatae Pro-Commiſſario Generali Apoſtolico, et Regalis Academiae Quinqueviro Cenſore. A. ciↄ iↄ cc xxvii.

Diſſertationem iſtam, inquit Auctor, in tres partes diuidimus. In prima aſſerimus Expeditionem Hiſpanicam Diui Iacobi eſſe honorificam; vnde quisquis qui pro illa decertat cenſendus eſt decertare pro aris et focis, non pro re nihili; agimus enim (vt praetereamus maximum Patriae decus) de tuendo honore Eccleſiae non ſolum militantis, ſed etiam triumphantis qui maximus vtrique acceſſit ab expeditione Hiſpanica Sancti Iacobi, gloriam enim vtrique detrahunt illius expeditionis impugnatores. n. 37. ſeq.

In ſecunda aſſerimus nihil obſtare quo minus illa expeditio citra vllum erroris timorem affirmari poſſit, nullumque contra illam afferri inſolubile argumentum.

In tertia produco fundamenta quae meo iudicio reddunt expeditionem Hiſpanicam Sancti Iacobi moraliter certam et euidenter credibilem propter numerum et pondus teſtium illam affirmantium, quibus contradici non poſſe oſtenſum eſt in ſecunda parte.

Pro coronide triplici parti appono triplicem appendicem. Prima eſt defenſio Mariana pro miraculoſa fundatione ſacelli Caeſar-auguſtani, vulgo dicti de columna a Sancto Iacobo Apoſtolo erecti.

Altera eſt defenſio Sanctae Romanae Eccleſiae pro authoritate Breuiarii Romani Vrbani VIII. authoritate recogniti.

Tertia eſt catalogus teſtium ex pleriſque nationibus et ordinibus qui affirmant Expeditionem Hiſpanicam Sancti Iacobi. Haec Auctor.

De libro ipſo, cuius pleraeque Diſputationes ad aliud forum pertinent atque ab inſtituto noſtrae Academiae prorſus ſeiunctae ſunt, hic plura dicere nihil attinet.

Alteros vero libros duo qui inſcribuntur *de vita et rebus geſtis Nonni Alvareſii Pyreriae Luſitaniae Comitis-ſtabilis Auctore Antonio Roderico Coſtio Reg. Acad. Socio. A.* clↄ Iↄcc xxx i i i. tam magnitudo rerum a Nonno geſtarum quam excellens Coſtii facundia et Liuianae ſuppar magnopere commendant. Huius igitur vitae praecipua capita Illuſtriſſimo Praeſidi et Vobis, Viri Clariſſimi, ipſis Auctoris verbis, quoad fieri poterit, recenſebo.

Pyre-

PYreria gens inter Hiſpanas clariſſima originem refert ad Mendum ſiue Menendum Principem virum ex Regio Gothorum ſanguine procreatum, qui octauo ſeculo cum haud modica claſſe ab Italia profectus vt armis ſibi regnum pareret in Hiſpania facto ad Calaica litora naufragio aegre cum pauciſſimis in terram euaſit--. Cum autem priores huius gentis varia cognomina vſurparint, (plures Foriaſios cognominatos conſtat) primus omnium Rodericus Gonſalius Pyreriae cognomen aſſumpſit ac poſteris tradidit a pago ſuae ditionis vt creditur deriuatum. Ab hoc quintus, et a Menendo gentis Principe tertius decimus fuit Aluarus Gonſalius Pyreria vir pacis bellique artibus inſignis---Quem virum nihil aeque illuſtrat ac filius Nonnus, et quidem quod fortaſſe mirandum ſit, ex altero et triceſimo natu minimus. Natus eſt Nonnus anno Domini cIↄ.ccc.XL. menſe Iunio in pago Bonjardinio dicto qui eſt in finibus Oppidi Certanae in regione Beriana. Matrem habuit Irenem Gonſaluiam Carualialem foeminam haud obſcuris natalibus et quae poſt ſtupri conſuetudinem quam cum ipſo Nonni patre habuerat non modo caſte vitam inſtituerit ſed etiam parce ac duriter egerit per annos fere quadraginta noxae poenas a corpore expetens vt a violato Numine humani erroris veniam impetraret.

pag. 4. p. 5. p. 6.

Annum expleuerat tertium decimum *Nonnus* cum bellum exarſit inter Ferdinandum Luſitanorum et Henricum Baeticorum Reges; *in eo bello* Aluarus Gonſalius Pyreria qui tunc erat in Regis comitatu, Nonno imperat vt conſcenſo equo paucisque familiarum ſtipatus extra p. 7.

oppidum procurreret quod cum impigre obiiſſet ad Regem tunc epulis accumbentem intromiſſus eſt rogatusque quid afferret de hoſtium numero atque itinere, reſpondit magnas eſſe copias, ſed ita incompoſite et negligenter per hoſticum iter facere vt non dubitet quin parua manu fundi poſſint, modo dux bonus adſit. Hos animos et prudentiam in puero mirantibus omnibus, Regina praecipua beneuolentia proſecuta eſt, Regem alloquitur rogatque vt Nonnum inter honorarios domeſticos ſibi attribuat, id mereri puerum notae nobilitatis et iam ſpectatae virtutis. Quod Rex non conceſſit ſolum ſed etiam ex ipſa vxoris oratione admonitus nobilium adoleſceentium virtutem remunerandam eſſe et accendendam, Didacum Aluareſium Pyreriam qui vna cum Nonno fratre hoſtes explorauerat in ſuorum familiarium numerum ſibi aſſumpſit.

pag. 10. Septimum decimum annum attigerat Nonnus cum ei pater vxorem dare decreuit. Verum is a re vxoria haud parum abhorrebat --. Quare cum non minimum negotium pater habuiſſet vt eius animum ad vxorem accipiendam appelleret, parenti demum praeceptis paternis Eleonoram Albinam primariam foeminam atque admodum diuitem Ferdinando Rege nuptias conciliante, collocauit, ex quo matrimonio breui tres liberos ſuſcepit, e quibus priores duos ſtirpis virilis ſtatim amiſit; tertiam autem prolem ſequioris ſexus ac Beatricem nominatam,
pag. 11. cum per aetatem licuit, Alphonſo Ioannis Regis filio notho in matrimonium dedit vnde clariſſima orta eſt ſoboles ad quam Principes Luſitani paternam originem, caeteri omnes fere maternam referunt.

Non

Non multo poſt flagrante bello inter Ferdinandum Luſitaniae et Ioannem Baeticae Regem Ferdinandi Ancorii Alcantarenſium Equitum Magiſtri filium Nonnus per epiſtolam ad certamen prouocat cuius certaminis conditiones erant vt nouem ſibi ſocios vterque deligeret omnesque paribus armis inſtructi aequo in loco equeſtri pugna dimicarent. Prouocationem Ioannes Ancorius (hoc erat pag. 12.
iuueni nomen) alacri animo excepit, idque Nonno reſcripſit, *qui denegata ſibi a Rege dimicandi facultate iram omnem in hoſtes conuertit quorum cum non paucos cecidiſſet, et iam confoſſo equo in ſummo vitae periculo ipſe verſaretur Vasquii Annii Cotii et ſociorum ope ſeruatus eſt, paulo poſt cum ex vrbe egredi a fratre prohiberetur ferro ſibi* p. 18. 19.
viam per excubitores vrbis patefecit ad Regis exercitum; ſed mox pace inter Reges inita Beatrix Ferdinandi Regis p. 20.
filia Baetico Regi pacta eſt.

Mortuo Rege Regina rerum ſummae praepoſita, ita p. 26. 27.
enim conuenerat pactis dotalibus, et foedere cum Rege Baetico inito, vt ipſa, ſi ſuperſtes marito foret, Luſitano interim moderaretur imperio, donec qui naſceretur ex Beatrice ſecundo loco filius annos attigiſſet tantae moli pares - - - Contra plebs interim fremere pro libertate, arma poſcere et omnia tumultu miſcere ac turbare - -, in- p. 28.
teriiſſetque adeo respublica, libertasque Luſitana impotenti Baeticorum dominatu oppreſſa foret, niſi Ioannes Auiſienſium Equitum Magiſter auctore et adiutore Nonno tanto periculo patriam liberandam ſuscepiſſet.

Primum tanti moliminis conſilium fuit Ioannem Ferdinandum Anderium (*Dynaſtam Aurenenſem, qui magnitu-*

dine opum gratiaque ac potentia non ſolum apud Reginam,
ſed etiam apud ipſum Regem quoad is vixit caeteros ante-
p. 29. *ceſſit*) occidere, itaque vehementer vigebat Nonnus. *Igi-*
tur Ioannes, prouiſis quae tempus monebat, Anderium
Oliſipone in ipſa regia obtruncat.

p. 30. Audita Anderii nece Nonnus inuitis ac fruſtra re-
nitentibus fratribus Oliſiponem ad Magiſtrum conuolauit,
vbi poſtquam arcem validis copiis et acribus ſepſit cu-
ſtodiis Praefectum arcis ad colloquium vocat, illumque
multa agendo, ſuadendo, pollicendo, eo perduxit vt pe-
pegerit, niſi intra biduum Regina ſuppetias ferret obſeſ-
p. 31. ſis, arcem dediturum. Moxque exactis induciis, cum
nihil copiarum ab Regina ſubmitteretur dedita eſt.

p. 42. *Ioannes grauiſſimis cauſis adductus* Nonnum decreuit
vniuerſae Transtaganorum genti praeficere ius ei ac po-
teſtas maior quam vlli vnquam Praefecto datur; neque
enim militiae tantum, ſed et domi publicam rem ad-
miniſtrare iuſſus.

p. 53. ſ. *Cum deinde Baeticos memorabili ad Fronteriam pugna*
p. 55. *ſuperaſſet*, auolat in vrbem nouam Arrucitanam armis
viriſque opulentam et ipſam Baeticorum copiis infeſſam.
Oppidum primo impetu cepit Baeticoſque in arcem com-
pulit, quam tamen obſidet paucoſque intra dies ad de-
ditionem cogit. Ea formidine motum Alecretum et
ipſum in confinio ſitum oppidum natura manuque vali-
dum in partes tranſit. Id exemplum et nonnulla alia
caſtella eo tracta ſequuntur quam plurimaque loca moe-
nibus nudata.

Preme-

Premebat interim Baeticus graui obſidione Oliſiponem --- qua capta oppreſſoque ibi ac deprehenſo belli auctore partiumque duce ſummae rei compotem ſe fore putabat totumque bellum eo ſucceſſu confici.

Interea Baetico variis modis pugnam detrectante Nonnus Palmellam et Almadam oppida capit, *nec* multo poſt Baeticus Rex victa conſtantia peſtilentiae damno iam haud quaquam tolerabili obſidionem ſoluit; vnde Nonnus -- impetum capit recedentem Regem in itinere aggrediendi *quod conſilium cum Ioanni et pluribus amicis non probaretur* Nonnus depoſita ſpe inuadendi Regis ad Transtaganos redit, *paullo poſt* Portellam capit, Eboram regreditur, Villamviſſoſam per inſidias inuadit, ſed irrito ſucceſſu, *eandem rurſus vi aperta aggrediens* tormentis quatit continuata nocte dieque verberatione quo plus terroris incuteret, neque vilum tempus eo horrore vacaret. Principio magno pauori eſſe ingens fragor quo ea machina globos excutit cogente flamma nitrato puluere concepta, mox intellectum eſt plus ſtrepitus quam damni afferre, rudibus ſcilicet etiam tunc eius artis initiis, nondum enim improba hominum ingenia nitrati pulueris vehementiam aut tormentorum magnitudinem eo prouexerant, quo prouecta noſtra ac parentum noſtrorum vidit aetas ſuam in perniciem ingenioſiſſime nequam.

p. 61. p. 68. p. 69. p. 73. p. 74. 75. p. 76. p. 78. p. 79.

Plures dies ea oppugnatio tenuit ſed vel nullo vel leui effectu --- vbi ergo Nonnus trahi in longum obſidionem videt, ſimul ipſe morae impatiens ſimul aliis Prouinciae neceſſitatibus vrgentibus ſoluere obſidionem coactus eſt.

Ioan-

p. 86. 87. *Ioannes in Concilio Luſitanorum Rex deſignatus Nonnum* Comitem ſtabilem creat, qui eſt proximus Regio faſtigio gradus quaſi aſſiduus Regi Comes, particepsque imperii

Interea Baeticus --- reparare vires, nouum militem legere, nouas claſſes aedificare, vt Auiſienſem plus copiarum cientem aggrederetur. Conſultiſſimum autem putabat, ſi Oliſiponem haud dubie rerum caput et Ioannis fidiſſimum praeſidium interclusis maritimis commeatibus fame premeret, eaque de cauſa Hispalim proficiſcitur ad vrgendum claſſis molimen. Itaque eo inſtante ſpe celerius adornata claſſis Hispali ſoluit breuique portum Oliſi-
p. 88. ponenſem inuehitur ---. Claſſi ſatis erat virium ad occupandas portus fauces maritimamque nauigationem impediendam, non tamen ad oppugnandam vrbem copiae ſuppetebant, ſed impeditis maritimis ſubuectionibus graue incommodum opulentae vrbi afferebat. Qua de re Ioannes crebris Oliſiponenſium nuntiis admonitus opem fidemque eius implorantium, cum Nonno de liberanda ciuitate agit; neque is ad iuſſa ac pericula capeſſenda ſegnis eas partes libenter ſuscipit. Igitur Portucale vrbem, quae erat alterum Luſitanae libertatis propugnaculum, ſe confert, *at communicato cum primoribus eius ci-*
p. 90. *uitatis conſilio* agnouit Nonnus difficultatem iuſtae claſſis parandae, itaque alio cogitationes conuertit. Maxima pars regionis eius, quae Miniana a Minio flumine dicitur et Interamna, quod duos inter amnes Durium ac Minium iacet, Baetici Regis partes Sacramentumque ſusceperat. Commodiſſimum igitur viſum eſt regionem ingredi

gredi infeſto exercitu, vt Luſitanis nouo Regi ſtudentibus fiduciae ac tutelae eſſet, caeteris vero terrori.

Igitur Nonnus Interamnam regionem infeſta manu ingreſſus Neiuae Caſtellum recipit, Viannam vrbem, Cerue- p. 91. 92.
rianos, Monſarenſes, Bracherenſes atque vna cum Rege 93.
Ioanne Pontemelinam oppidum intercipit. 94.

Fuit hoc bellum, ciuile externumque ſimul, ideo- 96.
que ea tempeſtate magna transmutatio fortunarum facta eſt in vniuerſa gente Luſitana; nam cum plerique Luſitanorum Baeticorum partibus adhaeſiſſent, creuit noua nobilitas translatis bonis eorum in nouos homines qui Ioannem ſequebantur.

Oliſiponenſes non iam metus inſtantis nouae obſidio- p. 97.
nis ſollicitabat, verum ipſa obſidio coepta vrgebat. Igitur Ioannem orabant ne tam bene de ſe merentes nouo atque integro obſidio premi pateretur. Ioannes *poſt va-*
riam deliberationem Oliſiponenſium precibus, ſecundum Nonni p. 100.
ſententiam aſſenſus eſt et cum hoſte pugnam committere ſta- p. 104.
tuit in qua A. CIↃCCCLXXXV. *Baeticorum Regem vicit.* p. 110.
Nonnum cuius potiſſima opera tantam victoriam adeptus fuerat *Ioannes* Aurenenſis Comitis dignitate oppidique imperio et redditibus ornauit.

Paucos poſt dies quieti datos Nonnus in Tranſtaga- p. 116.
nam regionem proficiſcitur - - neque enim - - - hoſtibus permittendum *exiſtimabat* vt animos tanta clade perculſos colligerent - - Stremotium igitur totius regionis praeſidiis conuocatis primoribusque in conſilium adhibitis ſibi

d in

Nonni liberalitatem verbis amplificant, non regiae ſolum aequant, ſed ſupra ipſam etiam attollunt.

p. 161. Haec Regis animum commouiſſent niſi inſita prudentia exaggerata a veris diſtinguere nouiſſet et Nonni fidem tam exploratam habuiſſet vt labefactari nullo modo poſſet. At tamen priuati hominis magnitudini modum cenſuit adhibendum eundemque caeteris primoribus, quibus oppida aut redditus dominici iuris donauerat, im-
p. 163. ponendum, *quae controuerſia inter Regem et Nonnum per Pontificem Eborenſem compoſita eſt.*

164. *At* elapſis ſexennalibus induciis cum nec prorogatae fuiſſent, nec pax conueniſſet, bellum reſumere neceſſe
165. fuit. *Dionyſius enim Petri Luſitanorum Regis ex Agnete filius quum regio nomine inſignitus regnum inuaderet* Nonnus comperta *eius* irruptione non expectatis Regis *ſui* mandatis qui ad extremos Luſitaniae fines in Calaicis ob ſidione Tudis vrbis tenebatur, ſumma feſtinatione copias colligit et quam maximis itineribus obuiam Dionyſio ire
166. contendit. At Dionyſius iam antea certior factus Nonnum cum copiis aduentare, *exercitum reducit.*

168. Interea Baetici tantis malis fracti -- coepere ſerio de finiendo exitiali bello cogitare. Binos vterque Regum induciarum paciſue conciliatores decreuit qui ad vtriusque regni confinia conuenirent vnusque communi vtriusque Regis conſenſu Ambroſius --- de Marinis nominatus eſt vt in pari numero tamquam in iudicio, vnde maior iudicum pars ſtaret, ea valeret ſententia Luſitanus Nonnum et Pontificem Conimbricenſem elegit qui pactis prius trium men-

menſium induciis vt de pace concilianda aut longi temporis induciis tuto tractari poſſit ineunte Februario anni Domini. cIↄccc xcix. Oliuentiam profecti ſunt. *At* conſumto per diſputationes induciarum tempore ſolutoque congreſſu Nonnus Eboram, vbi tunc Rex erat, ſe recipit, eique venienti idem Rex ſex millia paſſuum obuiam progreditur.

Deſperata pace *et* apparatis -- quae ad bellum opus 170.171
erant Ioannes Alcantaram oppugnare decreuit. Sed cum 173.
obſeſſis maiora in dies auxilia aduenirent inde deducere 174.
exercitum viſum eſt. *Tandem* in decennium induciae pactae, redditis vtrinque oppidis et caſtellis dimiſſisque ſine pretio captiuis anno a Chriſto nato cIↄ.cccc vii. caeterum annitente poſtea Catharina Baeticae Regina quae ſoror erat Philippae Luſitaniae perpetua pax aequa lege ſancita eſt anno cIↄ.cccc xi.

Erat Nonno filia nomine Beatrix tantarum opum p. 175.
haeres nam liberos ſtirpis virilis quos ſusceperat breui 176.
amiſit. Rex qui periculoſum ducebat *eas* ad priuatum hominem peruenire -- Alphonſum quem caelebs ſusceperat collocandum puellae in matrimonium decreuit, idque Nonnus libentiſſime probauit; paratisque ſumma cum omnium laetitia nuptiis in generum Barcellenſem Dynaſtiam multaque alia oppida et vectigalia transtulit Regemque orauit vt generum Comitis dignitate exornaret, ſe enim in illius gratiam pacto renuntiare de non creando Comite, ſe ſuperſtite; indeque Alphonſus Comes Barcellenſis factus, qui poſtea primus Brigantinus Dux fuit, a quo Reges *Luſitaniae* ſtirpem virilem deducunt, caeteri Chriſtiani Orbis Reges foemineam

p. 176. Poſt haec Nonnus cum filiam ex animi ſententia collocauiſſet, ſolutus iam publicis priuatisque curis, aedificandis ſacris aedibus totus incubuit. Sed cum eſſet
p. 177. Eborae funeſtus nuntius de filiae obitu ſupra modum tanti viri animum afflixit, vt videretur eum caſum nequaquam pro caetera animi magnitudine tuliſſe.

Caeterum Ioannes Rex bellum Mauritaniae inferre
p. 179. ſtatuit -- factoque ingenti apparatu et magna claſſe vna cum tribus liberorum natu maximis et Nonno Oliſipone
p. 181. ſoluit anno Domini cIↄccccxv. *Capta* XII. *Calendas ſeptembris anni Domini* cIↄccccxv. *Septa vrbe Rex* Nonno expugnandae arcis curam dedit *quam poſtero die cepit.*

p. 183. Haec -- expeditio fuit Nonno vltimum operum bellicorum cum annum aetatis ageret quinquageſimum quintum. Septem inde annos priuatus vixit, nullo nec militari nec ciuili magiſtratu functus quos domeſticis rebus componendis inſumpſit perficiendoque operi templi Carmelitani -- illudque perfectum Deiparae cum dedicaſſet Carmelitani inſtituti ſodalibus tradidit, ſeque eorum collegio adiunxit, rebus humanis valere iuſſis vt totus Diuinis vacaret et ne quid vmbrae dignitatis eo in ſtatu retineret, Sacerdotis gradum recuſauit, vt humillimis quibusque miniſteriis quae ad non initiatos ſpectant, mancipatus degeret; coepit deinde per vrbem mendicare, neque Comes-Stabilis appellari ſinebat, Nonni tantum nomine contentus.

Sepul-

Sepultus eſt - - in cella maxima Carmelitani Templi p. 187.
Oliſiponenſis - - ad dextrum cornu arae maximae magnifico in tumulo ex candidiſſimo marmore. Sepulturae honorandae affuit Rex, Eduarduſque filius natu maximus cum omnium nobilium coetu. Statura fuit modica, colore candido, facie oblonga, oculis paruis ſed acribus, corpore obeſo quam gracili propior. Firma valetudine vſus eſt nec niſi ſemel atque iterum morbo tentatus. Nullum conſilium cepit, nec vllam vnquam rem aggreſſus eſt niſi prius adorato Numine inuocataque Deiparae ope et votis nuncupatis quae non ſolum ſedulo ſoluebat, ſed etiam augebat. Multi vndique pietatis cauſa ad eius ſepulchrum conueniebant, idque diu celebratum eſt, cum omnibus firma perſuaſio eſſet per eius merita praeſentem a Deo opem impetrari ad pellendos morbos, ſi aegri terram ex ſepulchro ſumptam in aqua ebibiſſent. Sed p. 188.
quanquam hac aetate concurſus ille vulgi refrixerit, manet, manſuraque eſt in ſapientum animis firma opinio et exiſtimatio de eximia viri virtute ac ſanctitate, habentque omnes perſuaſiſſimum Caeleſtium numerum auxiſſe.

CLAS-

Emendanda.

Pag. IV. lin. 17. et pag. XIV. lin. 6. leg. *Ribeyro.*

Pag. V. lin. penult. leg. *aequi.*

CLASSIS PRIMA

CONTINENS

MATHEMATICA.

DISSERTATIO HYDRAVLICA
DE

MOTV AQVARVM

PER VASA AVT PER CANALES QVAMCVNQVE FIGVRAM HABENTES FLVENTIVM.

AVCTORE

Ioh. Bernoulli.

PRAEFATIO.

Tabula I.

HYdroſtatica, quae agit de aquis ſtagnantibus in vaſis inferius clauſis, habet ſuas leges demonſtratas atque principia ex ratione deducta, vnde effectus et phaenomena clare et dilucide explicantur, ita vt circa hanc ſcientiam vix amplius quid deſiderari poſſit. Aliter ſe res habet in Hydraulica, vbi non tantum de grauitatione aquarum earumque preſſionibus agitur: ſed praeterea motus qui inde naſcitur, ſi aquae per datam aperturam poſſunt effluere, aut ſi ex vno tubo in alium diuerſae amplitudinis transire coguntur, atque alii effectus admirandi, qui eum motum comitantur, demonſtratiue determinari debent. Haec certe ſcientia, vulgo Hydraulica *dicta, admodum eſt ardua, neque adhuc ad leges regulasque mechanicas reuocata habetur; quicquid Auctores ea de re ſcripſerunt,*

pſerunt, vel ſola nituntur experientia, vel rationibus incertis omnino parumque ſoliditatis habentibus.

In opere hydrodynamico, quod non ita pridem in lucem edidit Filius meus, felicioribus auſpiciis aggreſſus eſt materiam iſtam, ſed fundamento nixus indirecto, *conſeruatione ſcilicet virium viuarum, licet veriſſimam atque a me demonſtratam, nondum tamen ab omnibus Philoſophis receptam, primus ego hanc hypotheſin adhibui in Dynamicis ſolidorum, (poſtquam* Hugenius *ſimili principio pro centro oſcillationis determinando vſus eſt) oſtendique eandem conſtanter ex illa hypotheſi ſolutionem elici, quam dant ordinaria principia dynamica, ab omnibus Geometris admiſſa; quae ſane perpetua ſolutionum, vtraque via erutarum, conformitas vel ſola ſufficeret ad conuincendam aduerſariorum obſtinationem.* Directam *methodum, qua* a priori *et per ſola dynamices principia inueſtigari poſſit natura motus aquarum ex vaſis per foramina erumpentium aut per canales non vniformis amplitudinis fluentium, hactenus dedit nemo.*

Miratus vnde tanta difficultas, vt in fluidis non aeque ac in ſolidis ſuccedat principiorum dynamicorum applicatio, tandem rem acrius animo voluens detexi veram difficultatis originem, quam in eo conſiſtere deprehendi, quod pars quaedam virium prementium impenſa in formandum gurgitem *(a me ita dictum, ab aliis non animaduerſum) tanquam nullius momenti fuerit neglecta et inſuper habita, non aliam ob cauſam, quam quia gurges conflatur ex quantitate fluidi perexigua ac veluti infinite parua, qualis formatur quotieſcunque fluidum tranſit ex loco ampliori in anguſtiorem vel vice verſa ex anguſtiori in ampliorem. In priori*

caſu

caſu ſit gurges ante tranſitum, in altero poſt tranſitum. Demonſtrabo autem ad formandum gurgitem, quantumuis paruam habeat moleculam, requiri tamen vim prementem non inſenſibilem nedum infinite paruam, ſed finitam ac determinatam, adeoque neutiquam contemnendam, ſed dignam omnino vt in computum veniat: Nam vis illa ad hunc effectum requiſita, quod mirum videri poteſt, plane non dependet ab extenſione gurgitis, qui maior minorue concipi poteſt, modo concipiatur vt valde paruus, ſemper eandem ad ſui formationem abſumit partem virium prementium, manentibus caeteris circumſtantiis.

Quid ſit gurges ac quomodo formetur, ex ipſa rei tractatione intelligetur, ſimulque patebit, formationem gurgitis peragi ſine diſpendio ſenſibili virium viuarum reſpectu quantitatis earum, quae eſt in totali maſſa aquea; hinc eluceſcit ratio, cur tuto et ſine errore adhiberi poſſit theoria virium viuarum in Hydraulicis, etiamſi ad gurgitem non attendant illi, qui hac Theoria vtuntur; dummodo gurgitis exiſtentiam non ignorent, videantque illum nihil derogare virium viuarum conſeruationi, ſecus enim contendere non poſſunt, ſe rei veritatem perfecte et ſcientifice conſecutos eſſe.

Disquiſitionem hanc abſoluam duabus partibus: In prima conſiderabo phaenomena aquarum fluentium et effluentium per vaſa cylindrica aut prismatica, ſiue ſint ſimplicia, ſiue ex pluribus compoſita, vt ſunt canales ex variis diuerſae amplitudinis tubis ſeu ſyphonibus cylindricis coagmentatis. In altera parte perſcrutabor omnia vniuerſaliſſime, cuiuscunque ſint figurae tam regularis quam irregularis vaſa perforata ipſisque adaptati canales ac tubi.

A 3 *Ad*

Ad clariorem rerum intelligentiam praemitto definitiones atque lemmata ſequentia, quorum veritas ex Dynamicis tum ex Hydroſtaticis eſt manifeſta.

1. *Vis* acceleratrix *vniformis eſt, quae dato corpori dato tempore velocitatem imprimit.*

2. *Vis* motrix *eſt, quae quando agit in corpus quieſcens, illud in motum concitat, aut quae corpus iam motum vel accelerare vel retardare vel eius directionem mutare poteſt.*

3. *Vires motrices ſunt in ratione compoſita ex ratione maſſarum et virium acceleratricium: Sic ex. gr. ad mouendam maſſam duplam cum vi acceleratrice tripla, aut quod idem eſt ad mouendam maſſam triplam cum vi acceleratrice dupla requiritur vis motrix ſextupla.*

4. *Vis motrix diuiſa per maſſam dat vim acceleratricem, per hanc vero diuiſa dat maſſam.*

5. *Grauitas abſoluta* g, *ſeu cauſa grauitatis, quaecunque illa ſit, eſt vis acceleratrix, quae cum animat determinatam maſſam corporis* m, *producit in illa vim motricem* $= gm$; *licebit autem in mente noſtra eam ſeparare a corpore et ita conſiderare tanquam extrinſecus in corpus ageret: concipimus vtique idem illud corpus grauitatis expers a vi motrice externa* gm *eadem lege acceleratum iri, qua acceleratur naturaliter. Illam autem vim* gm *extra materiam exiſtentem, vocare lubet vim motricem* immaterialem; *vnde ſi illa aliorſum translata agat in aliam maſſam* M, *accelerabitur haec vi acceleratrice* $= \frac{gm}{M}$.

6. *Vis*

6. *Vis motrix immaterialis atque inuariabilis, agens ſine impedimento in corpus, eodem modo illud accelerat ſiue adhuc quieſcat ſiue iam ſit in motu; cum enim vis illa ſemper comitetur corpus, nullum inter ſe habent motum relatiuum, adeoque vis motrix eodem modo agit in corpus motum, ac ſi vtrumque omnino quieſceret. Haec cauſa eſt cur corpora grauia inter cadendum continuo et vniformiter accelerentur ſecundum tempora; ſuppoſito ſcilicet intenſitatem vis acceleratricis non mutari inter agendum, hoc eſt, neque augeri neque minui, ſicuti reuera vis grauitatis eandem continuo ſeruat intenſitatem in corpore graui deſcendente aeque ac ab initio deſcenſus.*

7. *Intenſitas vis motricis* inuariabilis, *dicitur menſura ſecundum quam in corpore mouendo producitur maior minorue vis acceleratrix: Sic grauitas in corpore verticaliter cadente maiorem habet intenſitatem, quam ea in eodem corpore ſuper plano decliui delabente; in primo enim caſu maior producitur vis acceleratrix quam in altero, in vtroque autem grauitas eſt inuariabilis.*

8. *Vis motrix* variabilis *eſt cuius intenſitas mutatur in agendo, ſic ex. gr. vis elaſtri tenſi ab initio relaxationis maiorem habet intenſitatem, per conſequens maiorem imprimit corpori propellendo vim acceleratricem quam in progreſſu relaxationis; De his haec habetur regula: Sit ſpatium a corpore percurſum* $= x$, *maſſa corporis propulſi* $= m$, *vis motrix in fine ſpatii percurſi* $= p$, *velocitas acquiſita* $= v$, *tempus per* $x = t$, *proinde* $dt = \frac{dx}{v}$; *erit* $\frac{pdt}{m}$ *ſeu* $\frac{pdx}{mv} = dv$, *ideoque* $\int pdx = \frac{1}{2} m v v$; *id quod notiſſimum eſt.*

9. *Par-*

9. *Partes inferiores aquae in vaſe aliquo contentae premuntur a ſuperincumbente maſſa aquea ſecundum ſolam profunditatem, quamcunque vas habeat figuram, hoc eſt, ſi maſſa aquea cogitatione diuidatur in ſtrata horizontalia infinite paruae craſſitiei, vnumquodque ex illis ſtratis tantundem premitur ac ſi illi incumberet cylindrus aqueus eiusdem altitudinis quam eſt ea, quae in vaſe reſpondet profunditati ipſius ſtrati.*

10. *Hinc recte colligitur: Si amplitudines ſtratorum eandem craſſitiem infinite paruam habentium ſint* $m, m^{I}, m^{II}, m^{III}$, *etc. eorumque adeo ponduſcula propria ſint etiam vt* $m, m^{I}, m^{II}, m^{III}$ *etc. ſeparari poterunt per mentis abſtractionem a ſtratis ipſorum grauitationes, ita vt eorum ſola ſuperſit materia ſine pondere, ſed ſi ablatarum grauitationum loco totidem aliae ſubſtituantur, quae iunctim premant ſupremam aquae ſuperficiem, obſeruando nimirum in ſingulis hanc analogiam, vt ſit amplitudo cuiuslibet ſtrati ad amplitudinem ſupremae ſuperficiei ita grauitatio propria ſtrati ad grauitationem ſubſtituendam: Orietur inde in ſingulis ſtratis eadem preſſio, ac ſi manſiſſent in ſtatu ſuo naturali.*

11. *Voco* translationem *ſubſtitutionem illam mentalem: Vt me explicem, habeat ſtratum aliquod ex inferioribus amplitudinem* $= m$, *eius grauitatio vel ponduſculum proprium* $= \pi$; *amplitudo ſtrati ſupremi* $= h$, *erit* grauitatio translata *ad ſuperficiem ſupremam* $= \frac{h}{m}\pi$, *quae cum reliquis omnibus ita* translatis *conſtituit totam vim motricem immaterialem, qua omnis aqua in vaſe deorſum vrgetur eodem modo ac fit naturaliter.*

Mo-

Monitum.

Monere iam conuenit in anteceſſum, me per totam hanc tractationem de motu aquarum fluentium abſtrahere a conſideratione impedimentorum peregrinorum et accidentalium, quae alterare poſſunt motum per regulas determinatum; Talia impedimenta ſunt aquarum imperfecta fluiditas, item illarum adhaeſio atque frictio ad latera vaſorum, nimia tuborum gracilitas, foraminum ſeu luminum anguſtia, tenacitas particularum fluidarum ob quam non facillime a ſe inuicem ſecedunt, et quae ſunt alia huiusmodi ad quae non attendo. Hoc quoque notari velim, non eſſe abſolutae neceſſitatis vt ſemper aquarum ſtrata in ſitu horizontali concipiantur, commodius illa finguntur perpendicularia ad directionem motus aquae, ſic ex. gr. cum aqua ex vaſe ampliori transfluit in tubum anguſtiorem horizontalem cuius orificii vel luminis area ſit in plano verticali et ad latus tubi recto, aqua in tubo contenta rectiſſime diuidi concipitur in ſtrata verticalia et plano luminis parallela, eoque magis quod ipſa natura hunc quaſi ſitum affectat; videmus enim columnam aqueam in tubo aliquo duas lineas in diametro non multum excedente habere ambas ſuas ſuperficies extremas diſpoſitas ad ſitum perpendicularem lateribus tubi, quamuis tubus ipſe ſit ad horizontem obliquus vel omnino horizontalis. Linea coniungens centra grauitatis ſtratorum, ſiue ſit recta vt in tubis rectilineis, ſiue curua vt in tubis curuilineis, vocabitur Linea centrica *vel ſimpliciter* centrica; *ſingula quippe ſtrata quoad materiam in centris ſuis collecta eum habere motum cenſentur quam ipſa habent ſtrata.*

DISSERTATIONIS HYDRAVLICAE
PARS PRIMA
AGENS
DE
MOTV AQVARVM
PER VASA ET CANALES CYLINDRICOS QVI EX PLVRIBVS TVBIS CYLINDRICIS SIBI INVICEM ADAPTATIS SVNT CONFLATI.

§. 1.

Figura 1. DEtur primo canalis A B C F D E compoſitus ex duobus tubis cylindricis diuerſae amplitudinis A G D E et G B C F, quorum ille fundum G D apertum habeat foramine G F per quod communicet cum tubo anguſtiori B C. Sit vero totus canalis B E plenus liquore homogeneo, per ſe nullius grauitatis, ſed vrgeatur a parte orificii A E data vi motrici $= p$, quae aequaliter premendo expandatur per totam ſuperficiem liquoris A E; quaeritur lex accelerationis, qua liquor per canalem profluet. Suppono autem canalem ſemper manere plenum liquore, quod fit concipiendo, ſuppeditari iugiter aliunde nouam materiam liquoris eadem quouis momento velocitate in tubum G E ſubingredientis ad reſarciendum id, quod per alterum orificium G F egreditur in tubum G C, atque ex hoc ipſo per lumen B C in auras dilabitur.

§. 2. Ex hydroſtaticis aſſumſi vim motricem p immaterialem, qua premitur ſuperficies liquoris A E, propagari

gari in inſtanti ad ſuperficiem GF liquoris in tubo BF contenti, idque ſiue ſtagnet liquor in toto canali, ſiue fluat dummodo plenus maneat.

§. 3. Dum tranſit liquor ex vno tubo in alterum, mutabitur vtique velocitas in ratione reciproca amplitudinum; at nulla mutatio eſt ſubitanea, ſed ſucceſſiua et gradualis, procedens per omnes poſſibiles gradus intermedios a minori ad maiorem, vel a maiori ad minorem.

§. 4. Hinc quando fluit liquor motu parallelo, ita vt quolibet momento eadem inſit velocitas ſingulis partibus liquoris in directione ab AE verſus GD, antequam partes ipſi GF proximae perueniant ad orificium GF, oportet vt per diſtantiam ſaltem minimam HG, incipiant accelerari et accelerando pergant donec in ipſo ingreſſu GF acquiſiuerint velocitatem liquoris per tubum BF fluentis motu pariter parallelo ſingulisque partibus communi.

§. 5. Formatur itaque pro latitudine indefinite parua HG, aliquis quaſi gurges IFGH ex lato in anguſtum coarctandus, per quem liquor continua acceleratione, ſed tamen per gradus, adaucta perlabi debet, manente portiuncula quam minima liquoris (quae replet ſpatiolum IFD) in quiete perpetua.

§. 6. Sit curua IMF terminans gurgitem cuiuscunque naturae, neque enim neceſſe eſt eum ſupponere alicuius determinatae figurae; mox enim demonſtrabo, eandem ſemper requiri vim motricem ad id vnice deſtinatam

liquor per gurgitem cogatur, qualemcunque habeat latitudinem HG, modo ſit infinite parua, et cuiuscunque ſit naturae linea IMF, quae connectit extremitates I et F.

§. 7. Nemo putet vim illam motricem (quae exiguam adeo imo infinite paruam portiunculam liquoris per gurgitem protrudit) debere et ipſam eſſe infinite paruam adeoque contemni poſſe. Eſt enim omnino finitae quantitatis illa vis motrix, ideo quia ſi quantitas materiae mouendae eſt infinite parua, ex altera parte vis acceleratrix debet eſſe infinite magna, ad id nimirum vt tempusculo infinite paruo, quo liquor percurrit ſpatiolum HG, generari tamen poſſit mutatio finita in velocitate, vtpote ea quae fuerat velocitas in H ad eam quae iam eſt in G, ſe habet vt GF ad HI.

§. 8. Neglectio huius vis motricis, tanquam nullius momenti, in cauſa fuit, cur nemo ad hunc vsque diem extiterit, qui ex principiis ſtaticis et pure mechanicis dare potuerit leges liquorum per canales non vniformes fluentium, ſed quicunque ſusceperunt illas exacte determinare, recurrerunt meo quidem exemplo ad principium virium viuarum, de cuius applicatione ad hoc negotium aliaque in ſolidis aeque ac in fluidis forſan nunquam cogitaſſent, ſi me praeeuntem non habuiſſent, qui quippe primus docui hunc vſum deriuare ex conſeruatione virium viuarum. Sed ipſe ego non ſatis contentus indirecta hac methodo, vtpote fundata in theoria illarum virium a multis nondum admiſſa, non deſtiti inquirere in methodum directam, quae niteretur vnice principiis dynamicis a nemine negatis, donec tandem poſt meditationem

tionem longiuſculam anno iam 1729. voti compos factus vidi totius rei cardinem verſari in contemplatione gurgitis, antea a nemine animaduerſi; nunc itaque inuenta mea, Amicis quibusdam priuatim explicata, etiam cum publico communicare conſultum duco: hunc in finem gurgitis generatione iam indicata, inceptum lubet qua potero perſpicuitate proſequi.

§. 9. Concipiatur abſciſſa HL $=t$, applicata LM $=y$, atque prioris elementum L$l=dt$; dicaturque tubi HE amplitudo AE ſeu HI $=b$, tubi GC amplitudo BC ſeu GF $=m$, liquoris in tubo GC velocitas $=v$, adeoque liquoris in tubo HE velocitas erit $=\frac{m}{b}v$, ſunt enim velocitates amplitudinibus reciproce proportionales, ob eandem rationem erit in quolibet gurgitis loco liquoris LMml velocitas $=\frac{m}{y}v$, quod dicatur $=u$; iam ergo ſit vis acceleratrix, qua animatur ſtratum liquoris, $=\gamma$, erit ex natura accelerationis $\gamma dt=udu$, proinde $\gamma y dt=yudu$, hoc eſt, vis motrix qua vrgetur ſtratum liquoris LM$ml=yudu$. Haec vero vis motrix per §. 2. generatur a vi motrice partiali in tubo HE exiſtente et expanſa per totam amplitudinem AE, quae vt innoteſcat faciendum eſt vt LM ad HL ſeu vt y ad b ita $yudu$ ad $budu$, erit $budu$ (translata nempe ipſius $yudu$) vis motrix particularis in tubo HE, quae producere poteſt vim motricem $yudu$ in gurgitis ſtrato LMlm, et integrando per totum gurgitem habetur $\frac{1}{2}b(vv-\frac{mm}{bb}vv)$ ſeu $\frac{bb-mm}{2b}vv$, quae deſignat vim motricem requiſitam in tubo HE ad id vnice, vt in gurgite fiat acceleratio

 neceſ-

neceſſaria ad mutandam velocitatem minorem in maiorem, qua opus eſt vt transeat liquor in tubum anguſtiorem GC.

Corollarium 1.

Hinc patet naturam curuae IMF, vt et latitudinem gurgitis HG, non ingredi in vis motricis determinationem ad generandum motum gurgitis, datis enim amplitudinibus extremis HI et GF ſeu h et m, et velocitate v, ſemper habetur vis motrix in tubo HE $= \frac{hh-mm}{2h} vv$ pro motu in gurgite generando.

Corollarium 2.

Quod ſi continuante fluxu liquoris, eius velocitas v in tubo BF maneat ſemper conſtans, manifeſtum eſt etiam alteram velocitatem in tubo HE manere conſtantem, adeoque vim motricem vel preſſionem p nihil amplius conferre ad motum in vtroque tubo accelerandum, vnde liquet totam illam vim p vnice adhiberi ad formandum gurgitem eumque in ſtatu ſuo conſeruandum; erit propterea $p = \frac{hh-mm}{2h} vv$.

Corollarium 3.

Fingamus tubum HE vel GE eſſe verticaliter erectum inſtar vaſis cylindrici et communicare cum tubo horizontali GC; atque vim p eſſe ipſum pondus columnae liquoris contenti GE, ita vt (poſito g deſignare vim naturalem acceleratricem grauium, atque HA vel GA $= a$) habeatur $p = gha =$ ponderi liquoris in GE contenti, vnde $gha = \frac{hh-mm}{2h} vv$. Sed vt v determinetur per altitu-

titudinem verticalem z, per quam graue aliquod libere delapſum acquirat velocitatem v, faciendum eſt $gdz = vdv$, proinde $gz = \frac{1}{2}vv$, ſubſtituendo igitur gz pro $\frac{1}{2}vv$, habebimus $gha = \frac{hh-mm}{h} \times gz$, vnde emergit $z = \frac{hh}{hh-mm}a$, id quod dat hoc Theorema hydraulicum.

Theorema.

§. 10. *Sit vas cylindricum* AGFE *verticaliter erectum inſtructumque ad fundum tubo cylindrico horizontali* FB *vtrinque aperto; ſit item tam vas quam tubus aqua iugiter plenus, vt nimirum tantum aquae eadem velocitate quam habet aqua in vaſe continuo ſuppeditetur per* AE, *quantum effluit per lumen* BC: *Dico velocitatem aquae effluentis (ſi illa naſcatur ex quiete) conuergere citiſſime ad eam quae acquiritur a graui libere cadente per altitudinem* $= \frac{hh}{hh-mm}a$, *cuius veritas patet ex Coroll.* 3. *praec.* Figura 2.

Corollarium 1.

Vnde ſi lumen BC ſit valde paruum reſpectu amplitudinis vaſis AE, adeo vt mm negligi poſſit reſpectu hh, prodibit $z = a$, hoc eſt, velocitas aquae effluentis ex tubo erit aequalis ei, quam graue libere delapſum ex altitudine EF acquirit. Quod eſt theorema notiſſimum, ſed ex principiis dynamicis nondum hucusque demonſtratum, praeſertim ſi adfuerit tubus BF adaptatus, cum antea creditum fuerit theorema valere tantum pro paruo foramine ad F ſuppoſito.

Corollarium 2.

Quo maius eſt lumen BC reſpectu amplitudinis vaſis AE, eo maior fit velocitas maxima aquae effluentis; aucto

aucto enim m augetur valor fractionis $\frac{bb}{bb-mm}$: donec euadente $m=b$, velocitas maxima ſit infinita, quod verum eſſe vel hinc quoque patet, quia tunc et vas et tubus ſunt eiusdem amplitudinis, formantque vnum continuum tubum reflexum, adeoque vis ponderis aquae in parte AF ſemper plena accelerat totam maſſam aqueam, vt tandem eius velocitas tempore infinito generata fiat et ipſa infinita. Nam dicendo longitudinem tubi $FC=b$, maſſa omnis aquae in tubo reflexo AGC erit $=ba+bb$, eaque non aliter accelerabitur quam corpus aliquod ſolidum quod animaretur vi acceleratrice $=\frac{gba}{ba+bb}$ $=\frac{ga}{a+b}$, tale vtique corpus cadendo per tempus infinitum acquireret velocitatem infinitam.

Corollarium 3.

Si vero m maius eſſet quam b, id eſt, ſi tubus horizontalis amplior eſſet quam vas verticale, velocitas maxima nunquam et ne quidem tempore infinito daretur, foret enim $\frac{bbm}{bb-mm}$ negatiuum; indicio quod durante fluxu in aeternum acceleratio aquae effluentis incrementum capere non deſinet: Hoc enim in caſu fiet in tubo gurges inuerſus reſpiciens orificium BC, qui vt ex ſequentibus patebit eam habet naturam, vt vim motricem adiuuet potius quam diminuat, dum ſeſe quaſi ſubducit preſſioni a tergo venienti, quo aqua in vaſe liberius deſcendere queat.

Scholium.

Hucusque conſiderauimus vas et tubum aquae conſtanter plenum, atque effluentem aquam in maxima ſua velo-

velocitate adeoque aequabili ſeu vniformi, quo fit vt nulla amplius requiratur vis motrix ad aquam acceleran-dam neque per vas neque per tubum, ſed vis motrix p tota vſurpetur ad coercendum gurgitem, qui formatur ante ingreſſum ex ſpatio ampliori in anguſtius. Nunc contemplabimur velocitatem fluxus aquae tanquam creſcentem atque initium ſuum a quiete ſumentem; ita vt ad accelerationem procurandam tam in vaſe quam in tubo ſua pariter peculiaris pars vis motricis p requiratur. Examinabimus primo caſum, quo vas cum tubo conſtanter plenum ſupponitur.

§. 11. Sit x longitudo ſpatii quam aqua ex quiete in tubo percurrit, erit $\frac{m}{b}x$ longitudo quam eodem tempore percurrit in vaſe; ſic pariter exiſtente velocitate in tubo $= v$, erit quoque velocitas in vaſe $= \frac{m}{b}v$; vnde vis acceleratrix in tubo $\frac{vdv}{dx}$, eaque multiplicata per maſſam aquae mb dabit vim motricem $= \frac{mbvdv}{ax}$, quae (per §. 2.) translata in vas dabit aequipollentem $\frac{bbvav}{dx}$, a qua nimirum illa in tubo $\frac{mbvdv}{dx}$ produci poteſt. Ita quoque vis acceleratrix in vaſe $= \frac{mm}{bb}vdv : \frac{m}{b}dx = \frac{mvdv}{bax}$, quae ducta in maſſam ba, dat vim motricem $= \frac{mavdv}{dx}$ ad aquam in vaſe propellendam, atque ſic ſumma trium virium motricium per gurgitem, per tubum et per vas debet aequare vim motricem totalem p, vnde haec nobis reſultat aequatio $\frac{bb - mm}{2b}vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{m\,v\,v}{dx} = p$; Eſto igitur, vt ante, p ipſum pondus columnae aqueae $= gba$, et fiat vt in Coroll. 3. §. 9. $gz = \frac{1}{2}vv$, quibus ſubſtitutis prodibit haec aequatio $\frac{bb - mm}{b}z + \frac{bbdz}{dx} + \frac{madz}{dx}$ $= ba$,

$= ba$, ſeu $(bb-mm)zdx + (bbb+bma)dz = bbadx$, vnde $dx = \frac{(bbb+bma)dz}{bba-bbz+mmz}$, quae debite tractata et integrata per logarithmos dabit $x = \left(\frac{bbb+bma}{bb-mm}\right) \times l\left(\frac{bba}{bba-bbz+mmz}\right)$ vnde progrediendo ad numeros (aſſumendo $1 = lf$), $z = \left(\frac{bba}{bb-mm}\right) \times \left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bb-mm}{bbb+bma}x}}\right)$. Quod ſi aqua in vaſe (quod breuitatis gratia ſine tubo annexo tantum habeat foramen amplitudinis m) animetur grauitate $\overset{I}{g}$ diuerſa a grauitate naturali g, inuenietur $z = \frac{\overset{I}{g}bba}{g(bb-mm)} \times$

$$\left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bb-mm}{bma}x}}\right).$$

Corollarium.

Si $x = \infty$, id quod dat caſum maximae velocitatis, ad quam fluxus conuergit erit, $1 : f^{\frac{bb-mm}{bbb+bma}}x = 0$, adeoque $z = \frac{bba}{bb-mm}$ pro grauitate naturali g, quod omnino conforme eſt Coroll. 3. §. 9. atque ſi praeterea m eſt infinite paruum reſpectu ipſius b, prouenit $z = a$, prorſus vt habetur in Coroll. 1. §. 10, quae methodum egregie confirmant.

Figura 2. §. 12. Expendamus nunc caſum, vbi vas AF aqua non manet plenum, ſed pro menſura aquae effluentis paulatim exinanitur eiusque ſuperficies AE continuo deſcendit. Finge aquam in tubo horizontali percurriſſe longitudinem x, proinde ex eo effluxiſſe (ſuppono enim vas et

et tubum ab initio plenum eſſe) quantitatem aquae $= mx$, hoc eſt, $=$ cylindro aqueo cuius baſis eſt m et longitudo x; Quod ſi igitur in EF ſumatur pars $EI = \frac{m}{b}x$, perſpicuum eſt, horizontalem HI eſſe locum ſuperficiei ſupremae ad quam aqua deſcendit in vaſe, poſtquam aquae pars mx effluxit per tubum: Reſtabit ergo in vaſe columna aquea $GI = ba - mx$, cuius pondus $g(ba - mx)$ iam eſt id ipſum quod vocauimus p. Sic itaque vis acceleratrix aquae reſtantis in vaſe (quae in §. 11. generaliter inuenta eſt $= \frac{mvdv}{bdx}$) ſi ducatur in maſſam aqueam quae nunc eſt $ba - mx$, habebimus vim motricem $= \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx)$ quae competit aquae per vas detrudendae, vnde iam colligendo tres vires per gurgitem, per tubum et per vas, aggregatumque aequando ipſi p, hoc eſt, ipſi $g(ba - mx)$, lucrabimur hanc aequationem $\frac{bb - mm}{2b}vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx) = g(ba - mx)$, vbi ſubſtituendo gdz pro vdv, et gz pro $\frac{1}{2}vv$, vt fecimus in Coroll. 3. §. 9. mutabitur noſtra aequatio in hanc aliam $\frac{bb - mm}{b}z + \frac{bbdz}{dx} + \frac{mdz}{bdx}(ba - mx) = (bba - bmx)dx$. Quae vera eſt aequatio, ex qua ſi eruatur valor ipſius z, habebitur altitudo per quam graue libere delapſum acquiret velocitatem quaeſitam, nempe aequalem illi quam habebit aqua in tubo poſtquam quantitas mx ex eo effluxit: Poteſt autem aequatio inuenta, in qua indeterminatae permixtae reperiuntur, per regulas noſtras (ope lemmatis mox ſequentis) integrari, atque ita innoteſcet valor ipſius z in terminis finitis: interim hoc loco ei negotio diutius non eſt immorandum, ſufficit mihi pro-

 blema

blema reduxiſſe ad aequationem differentialem vtendo principiis pure mechanicis, quod an a quoquam alio ante me praeſtitum fuerit haud recordor me vnquam vidiſſe. Sciendum vero ipſiſſimam hanc aequationem inueniri per methodum virium viuarum, ita vt et hoc nomine vſus illarum atque bonitas ſeſe commendet contra Aduerſarios.

Corollarium I.

Vt determinetur maxima velocitas liquoris effluentis, tum et ea in vaſe deſcendentis, ponendum eſt tantum $dz = 0$, quo facto aequatio noſtra ſuppeditabit $(bb - mm)\, z = bba - bmx$, proinde $z = \frac{bba - bmx}{bb - mm}$, quod, cum adhuc ipſum x incognitum in ſe contineat, nihil quidem determinat, niſi valor ipſius z ſimul etiam ex aequatione generali eruatur.

Corollarium 2.

Si m ſit valde paruum reſpectu ipſius b, aequatio generalis hanc induit formam $z\,dx + b\,dz = a\,dx$, vnde $dx = \frac{bdz}{a-z}$, quod dat $z = a - \frac{a}{f^{x:b}}$; Ergo vt in hoc caſu z ſit *maximum* oportet x eſſe infinitum, et tunc fiet $z = a$, quod quidem ex ipſo $dx = \frac{bdz}{a-z}$, ſeu ex $dx\,(a-z) = bdz$ ſtatim colligi poteſt, faciendo enim propter maximum z, ipſum $dz = 0$, ac proinde $z = a$. Vnde iterum liquet in vaſe ampliſſimo aquam per anguſtiſſimum tubum effluentem ſtatim acquirere velocitatem maximam ac poſtea ſemper aequabilem atque aequalem ei quam graue libere cadens ex altitudine vaſis acquireret, vt ſupra in Coroll. I. §. 9. inuenimus: hoc quippe in

in caſu vas conſiderari poteſt tanquam ſemper plenum, quia ob vaſis infinitam quaſi amplitudinem reſpectu habito ad tubi anguſtiam, requireretur vtique tempus etiam quaſi infinitum antequam in illo deſcendat aqua ſenſibiliter.

§. 13. Ecce nunc alium caſum: Sit tubus (qui ab initio ante fluxum vsque ad C aqua plenus ponitur) indefinite continuatus, ita ſcilicet vt deſcendente aqua in vaſe, nihil extra tubum effluere poſſit ſed ſemper quicquid liquoris ex vaſe deſcendit in tubum id vna cum eo quod iam ineſſe ſupponitur iunctim propulſum intra tubum fluere cogatur: Quaeritur lex accelerationis et velocitas ipſa pro quolibet ſpatio intra tubi cauitatem percurſo; vis acceleratrix in tubo hic etiam, vt in §. 11. oſtenſum eſt, erit $= \frac{vdv}{dx}$, ſed maſſa aquae propellendae nunc eſt $= mb + mx$, per quam vis acceleratrix $\frac{vdv}{dx}$, multiplicata dat vim motricem in tubo $= \frac{mbvdv + mxvdv}{dx}$, quae tranſlata ad amplitudinem vaſis dat vim motricem aequipollentem in vaſe $= \frac{bbvdv + bxvdv}{dx}$; Atque ſic coniunctis tribus viribus motricibus per gurgitem, per tubum et per vas, iisque aequatis vi motrici totali p, prodibit pro vaſe ſemper pleno ab affluente noua aqua haec aequatio $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{bbvdv + bxvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p = gba$, (conf. §. 11.). Sed pro vaſe nihil noui liquoris accipiente, haec altera $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{bbvdv + bxvdx}{dx} + \frac{mvdv}{bdx}$. $(ba - mx) = p = g(ba - mx)$, conf. §. 12., ſubſtituto gz pro $\frac{1}{2}vv$, aequatio prior dat hanc $(bb - mm)zdx + (bbb + bma + bbx)dz = bbadx$; poſterior vero

 hanc

hanc $(hh-mm)\,z\,dx + (hhb + hma + hhx + mmx)\,dz = (hha - hmx)\,dx$. Vtraque autem aequatio integrari poteſt per lemma ſupra promiſſum, quod nunc demonſtro.

Lemma.

§. 14. Sit aequatio integranda (et quidem ſine neceſſitate ſeparandi indeterminatas) $\alpha z\,dx + (\beta + \gamma x)\,dz = (\varepsilon + \theta x)\,dx$; ſcribendo y pro $\beta + \gamma x$, vnde $dx = \frac{dy}{\gamma}$, aequatio mutatur in hanc $\frac{\alpha}{\gamma} z\,dy + y\,dz = (\varepsilon + \theta x)\,dx$; qua multiplicata per $y^{\frac{\alpha}{\gamma}-1}$ habebitur $\frac{\alpha}{\gamma} z y^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} dy + y^{\frac{\alpha}{\gamma}} dz = (\varepsilon + \theta x)\,dx \times y^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} = (\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma}(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} \gamma\,dx$; integrando prodibit $y^{\frac{\alpha}{\gamma}} z = \int (\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma}(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} \gamma\,dx = \frac{1}{\alpha}(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \times (\varepsilon + \theta x) - \int \frac{\theta}{\alpha\gamma}(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \gamma\,dx = \frac{1}{\alpha}(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \times (\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha}(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}} - \frac{\varepsilon}{\alpha}\beta^{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{\theta}{\alpha\alpha + \alpha\gamma}\beta^{\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}}$. Notetur hic, duos poſtremos terminos adiectos eſſe more ſolito ad rectificandam aequationem, vt nimirum euaneſcente x, etiam euaneſcat z. Diuidatur nunc aequatio per $y^{\frac{\alpha}{\gamma}}$ hoc eſt per $(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$, vt emergat valor verus ipſius z, nempe $z = \frac{1}{\alpha}(\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha}(\beta + \gamma x)$

$$+ \left(\frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha}\beta^{\frac{\alpha}{\gamma}+1} - \frac{\varepsilon}{\alpha}\beta^{\frac{\alpha}{\gamma}}\right) \times (\beta + \gamma x)^{\frac{-\alpha}{\gamma}}.$$

§. 15. Vt igitur huius applicatio fiat ad priorem aequationem $(hh - mm)\,z\,dx + (hhb + hma + hhx)\,dz = hha\,dx$, erit hic $\alpha = hh - mm$, $\beta = hhb + hma$, $\gamma = hh$, $\varepsilon = hha$, et $\theta = 0$, quibus ſurrogatis obtinebitur

bitur $z = \frac{bba}{bb-mm} - \frac{bba}{bb-mm} (bbb+bma)^{\frac{bb-mm}{bb}} \times (bbb+bma + bbx)^{\frac{-bb-mm}{bb}}$, vel quod idem eſt, $z = \frac{bba}{bb-mm} \times \left(1 - \left(\frac{bb+ma}{bb+ma+bx}\right)^{\frac{bb+mm}{bb}}\right)$. Sin vero ad poſteriorem, vbi $\alpha = bb - mm$, $\beta = bbb + bma$, $\gamma = bb - mm$, $\varepsilon = bba$, $\theta = -bm$, reſultat $z = \frac{bba - bmx}{bb-mm} + \frac{bm}{2.(bb-mm)^2} \times (bbb + bma + bbx - mmx) + (\frac{-bm}{2(bb-mm)^2} - (bbb + bma)^2 - \frac{bba}{bb-mm} \times bbb + bma) \times (bbb + bmabbx - mmx)^{-1}$, quibus in ordinem digeſtis rite procedendo, emerget tandem $z = \frac{bbax - \frac{1}{2}bmxx}{bbb + bma + bbx - mmx}$.

Corollarium 1.

Si m reſpectu b eſt valde paruum, habebitur pro vaſe ſemper pleno $z = \frac{ax}{b+x}$, pariterque pro altero caſu prodit $z = \frac{ax}{b+x}$, quod quidem omnino ita euenire decet, quia enim ob m infinite paruum, aqua tempore infinito opus habet ad effluendum, antequam ſuprema eius ſuperficies in vaſe ampliſſimo ſenſibiliter deſcendat, patet vtique perinde eſſe ac ſi ſemper plenum maneret vas, ac proinde hi duo caſus in eundem prorſus recidunt.

Corollarium 2.

Si $b = 0$, hoc eſt, ſi in tubo horizontali indefinite longo FB, ab initio fluxus nihil aquae contineatur, erit pro caſu vaſis ſemper pleni $z = \frac{bba}{bb-mm} \times \left(1 - \left(\frac{ma}{ma+bx}\right)^{\frac{bb-mm}{bb}}\right)$

ſed

ſed pro altero caſu nihil noui liquoris accipientis, erit $z = \frac{hhax - \frac{1}{2}hmxx}{hma + hhx - mmx}$. In hoc poſtremo caſu hoc quoque notari dignum eſt, quod eo momento quo ſuperficies liquoris ad fundum vsque vaſis deſcenderit, id quod fit ſumendo $x = \frac{h}{m}a$, futurum ſit $z = \frac{1}{2}a$, hoc eſt, velocitas aquae in tubo poſt totalem vaſis depletionem erit ea quam graue acquireret cadendo ex dimidia vaſis altitudine.

De Canali trium pluriumue tuborum.

Figura 3. §. 16. Sit nunc Canalis AL conſtans tribus tubis AD, GC, BL ac totus aqua plenus: Sitque vis motrix p, quae expanſa vniformiter per ſuperficiem AE eandem premat vel vrgeat, quaeritur acceleratio et velocitas actualis, qua cum aqua ex tubo BL erumpit. Ante omnia hic notandum, duos fieri gurgites breuiſſimos, vnum in tranſitu per GF, alterum in tranſitu per BK, qui ſinguli ſuam propriam requirunt vim motricem transferendam ad amplitudinem AE, quibus dein addendae ſunt vires motrices columnarum aquearum in ſingulis tubis contentarum poſt translationem earum virium ad amplitudinem AE; quo facto ſumma omnium harum virium translatarum aequanda eſt vi motrici totali p, vnde reſultabit aequatio quaeſita.

§. 17. Sint igitur longitudines tuborum $AG = a$, $GB = b$, $BM = c$, eorumque amplitudines $AE = h$, $GF = m$, $BK = n$; dicatur hic etiam velocitas in tubo vltimo $BL = v$, velocitas in tubo ſecundo $GC = u = \frac{n}{m}v$.

velo-

velocitas in tubo vltimo BL $= v$, velocitas in tubo ſecundo GC $= u = \frac{n}{m} v$. Erit itaque per ratiocinium §. 9. adhibitum, vis motrix in ſuperficie AE requiſita pro gurgite per GF $= \frac{bb - mm}{2b} uu =$ (ſubſtituendo valorem ipſius uu qui eſt $\frac{nn}{mm} vv$) $\frac{bbnn - mmnn}{2bmm} vv$; item vis motrix in tubo GC requiſita pro gurgite per BK $= \frac{mm - nn}{2m} vv$, haec vero translata ad amplitudinem AE, faciendo vt m ad b ita $\frac{mm - nn}{2m} vv$ ad $\frac{bmm - bnn}{2mm} vv$, dat vim motricem in tubo primo AD ad gurgitem producendum per BK; adeoque ambae vires ſimul ſumtae $\frac{bbnn - mmnn}{2bmm} vv + \frac{bmm - bnn}{2mm} vv$, hoc eſt $\frac{bbmm - mmnn}{2bmm} vv$ ſeu $\frac{bb - nn}{2b} vv = p$. Atque ita determinata eſt velocitas fluxus per tres tubos, poſtquam illi ad aequabilitatem peruenit.

Corollarium.

Hinc patet, aquam per tres tubos eodem modo moueri, ac ſi ſecundo remoto tertius immediate primo eſſet adaptatus, poſito ſcilicet fluxum ad ſummam et aequabilem velocitatem perueniſſe; imo porro nunc liquet, quotquot ſupponantur tubi, vires motrices per gurgites ſingulos translatas ad tubum primum et iunctim ſumtas, aequiualere in motrici vnicae in tubo primo adhibendae ad gurgitem vnicum, qui fieret adaptando immediate tubum vltimum ad tubum primum, adeoque eandem in vtroque caſu ſequi aequabilem velocitatem, ad quam conuergit fluxus, ſiue transeat aqua per totum canalem ex omnibus tubis compoſitum, ſiue tantum omiſ-

ſis intermediis per primum et vltimum ſibi inuicem immediate connexos. Omnia igitur, quae ſupra de aequabili velocitate per duos tubos demonſtrauimus, applicanda ſunt ad canalem ex quot libuerit tubis conſtantem.

§. 18. Conſideranda nunc venit acceleratio per canalem multorum tuborum, quando nimirum fluxus aquae incipit a quiete; primo tamen tubo ſemper pleno exiſtente per affluxum nouae aquae, deſcendenti eadem velocitate ſuccedentis. Hanc in rem nihil aliud faciendum, quam vt vis motrix pro maſſa aquea protrudenda per ſingulos tubos ſumta transferatur ad amplitudinem tubi primi; aggregatum harum virium motricium translatarum, ſi addatur ad vim motricem per gurgites, hoc eſt, per illum vnicum qui fieret ſi vltimus tubus immediate primo adaptaretur, habebitur vis omnium, quae aequalis eſt facienda ipſi p.

§. 19. Vt hanc regulam applicemus ad canalem trium tuborum, quorum longitudines ſint a, b, c, amplitudines h, m, n, ſitque x longitudo ſpatii quam aqua in tubo vltimo ſeu tertio ex quiete incipiens percurrit, et v velocitas acquiſita in hoc tubo. Erit ad imitationem operationis §. 9. $\frac{n}{m}x$ longitudo quam aqua eodem tempore percurrit in tubo ſecundo, et $\frac{n}{m}v$ eius velocitas acquiſita; item $\frac{n}{h}x$ longitudo percurſa in tubo primo et $\frac{n}{h}v$ velocitas acquiſita. Hinc vis acceleratrix in tubo tertio $= \frac{vdv}{dx}$, eaque multiplicata per maſſam aqueam in hoc tubo nc, dabit vim motricem $= \frac{ncvdv}{dx}$, quae trans-

lata

lata in tubum primum dabit aequipollentem $\frac{bcvdv}{dx}$; Sic quoque vis acceleratrix in tubo ſecundo $\frac{nn}{mm}vdv : \frac{n}{m}dx = \frac{nvdv}{mdx}$, quae ducta in maſſam aquae mb tubi ſecundi, dat vim motricem $\frac{nbvdv}{dx}$, quae translata in tubum primum gignit $\frac{bnbvdv}{mdx}$: Sic tandem etiam vis acceleratrix in tubo primo $= \frac{navdv}{dx}$, quae cum iam ſit in tubo primo vlterius non eſt transferenda, tres iſtae vires ſunt igitur $\frac{bcvdv}{dx}$, $\frac{bnbvdv}{mdx}$, $\frac{navdv}{dx}$, quarum ſumma addita ad vim per gurgites, habebitur $\frac{bb-nn}{2b}vv + (bc + \frac{bnb}{m} + na)$ $\frac{vdv}{dx} =$ vi totali p.

§. 20. Sint nunc quatuor tubi, quorum longitudines a, b, c, e, amplitudines b, m, n, q, ſitque x longitudo in vltimo tubo percurſa, v velocitas acquiſita in vltimo tubo: Ad obſeruandam vniformitatem et legem progreſſionis ab vno tubo ad alterum, incipiam a primo, in quo vis acceleratrix $= \frac{qq}{bb}vdv : \frac{q}{b}dx$, eſt enim velocitas $= \frac{q}{b}v$, et elementum ſpatii percurrendi $= \frac{q}{b}v$, et elementum velocitatis $= \frac{q}{b}dv$, vt et elementum ſpatii percurrendi $= \frac{q}{b}dx$, habetur itaque ex lege accelerationis vis acceleratrix $= \frac{qq}{bb}vdv : \frac{q}{b}dx = \frac{qvdv}{bdx}$, eamque multiplicando per maſſam aquae mouendae ba, oritur vis motrix $\frac{bqavdv}{bdx}$, quae quia iam eſt in primo tubo non indiget vlteriori translatione, ſed in tubo ſecundo vis acceleratrix $= \frac{qq}{mm}vdv : \frac{q}{m}dx = \frac{qvdv}{mdx}$ ducta in maſ-

 ſam

ſam aqueam mh dat vim motricem in tubo ſecundo $= \frac{mqbvdv}{mdx}$, quae tranſlata in tubum primum dat aquipollentem $= \frac{hqbvdv}{mdx}$, eodem modo vis motrix tranſlata ex tubo tertio in primum erit $= \frac{hqcvdv}{ndx}$, et vis motrix tranſlata ex quarto in primum $= \frac{hqevdv}{qdx}$; omnes ergo ſimul ſumtae $= \frac{hqavdv}{hdx} + \frac{hqbvdv}{mdx} + \frac{hqcvdv}{ndx} + \frac{hqevdv}{qdx} = (\frac{a}{h} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \frac{e}{q}) \times \frac{hqvdv}{dx}$; ergo generaliter pro quocunque tuborum numero, quorum longitudines ſint $a, b, c, --- \pi$ et amplitudines $h, m, n, --- \omega$, erit ſumma omnium virium motricium in tubum primum tranſlatarum $= (\frac{a}{h} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \frac{e}{q} --- + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{h\omega vdv}{dx}$, cui ſi addatur vis motrix $\frac{hh - \omega\omega}{2h} vv$ pro gurgitibus vniuerſis, emerget vis motrix totalis ponenda aequalis ipſi p; vnde reſultat haec aequatio $\frac{hh - \omega\omega}{2h} vv + (\frac{a}{h} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} --- + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{h\omega vdv}{dx} = p$, vel ſcribendo gz pro $\frac{1}{2}vv$ haec altera $\frac{hh - \omega\omega}{h} z + (\frac{a}{h} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} --- + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{h\omega dz}{dx} = \frac{1}{g} p$, vel $(hh - \omega\omega) zdx + (\frac{a}{h} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} --- + \frac{\pi}{\omega}) hh\omega dz = \frac{h}{g} pdx$.

Corollarium I.

Si longitudines a et π tuborum primi et vltimi, nec non longitudines intermediorum, manent inuariabiles, primi nempe per continuum affluxum et vltimi per effluxum, erit ſeries $\frac{a}{h} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} --- + \frac{\pi}{\omega}$ conſtans, quae vocetur M, et $p = gha$, vnde haec aequatio prodit $\frac{hh - \omega\omega}{h} z + \frac{Mh\omega dz}{dx} = ha$, vel $(hh - \omega\omega) zdx + Mhh\omega$

dz

$dz = hhadx$, cuius x conſtruitur per logarithmos in z datos, ipſum vero z per numerales datos in x.

Corollarium 2.

Quodſi vero nulla affluente aqua noua depleatur primus tubus, effluente nimirum per vltimum datae longitudinis, ſicuti fieret, ſi primus tubus inſtar vaſis verticaliter erecti contineret liquorem proprio ſuo pondere preſſum, dum per canalem horizontalem, quem reliqui conſtituunt, expelleretur: Erit, ſi x vocetur ſpatium per vltimum tubum ex quiete percurſum, altitudo liquoris reſtantis in vaſe cylindrico $= a - \frac{\omega x}{b}$, adeoque a ſerie $\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \text{- - - -} + \frac{\pi}{\omega}$ auferendum iam eſt $\frac{\omega x}{bb}$, et pro $\frac{1}{g}p$ ſcribi debet $ba - \omega x$, id quod dat hanc aequationem $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega xdz = (bba - b\omega x)dx$. Quea per lemma §. 14. poteſt integrari.

Corollarium 3.

Porro ſi tubus vltimus ſit indefinite prolongatus, ita vt aquae ſuperficie ſuprema deſcendente in vaſe, aqua ex tubo vltimo non quidem effluat, ſed in eo continuo magis magisque protrudatur, ſcribendum eſt in ſerie non tantum $a - \frac{\omega x}{b}$ pro a, ſed etiam $\pi + x$ pro π, et ita pro hoc caſu acquiremus hanc alteram aequationem $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega xdz + bbxdz = (bba - b\omega x)dx$. Quae per idem lemma integrabilis eſt.

Corollarium 4.

Si computando vas ipſum pro primo tubo habeatur $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \text{- - -} = \frac{\pi}{\omega}$, hoc eſt, ſi longitudines tuborum,

 quo-

quorum numerus ſit N, vbique ſint proportionales ſuis reſpectiue amplitudinibus, generalis noſtra aequatio mutatur in hanc $(bb-\omega\omega)zdx+Nab\omega dz=\frac{1}{g}bpdx$.

Corollarium 5.

Si vero excepto vaſe vel tubo primo habeatur $\frac{b}{m}=\frac{c}{n}---=\frac{\pi}{\omega}$, ſitque numerus reliquorum tuborum $=N$, erit vtique $(bb-\omega\omega)zdx+ba\omega dz+\frac{Nbb\omega dz'}{m}=\frac{1}{g}bp\,dx$.

Corollarium 6.

Eſto nunc numerus tuborum infinitus, ſed vnusquisqe eorum excepto primo longitudinis infinite paruae, ita vt omnes ſimul ſumti repraeſentent canalem conoidicum truncatum, cuius amplitudo antica $=m$, et poſtica $=\omega$,
Figura 8 qualis eſt figura 8. RSTV, qui ſi concipiatur ſectus duobus planis proximis sr, tu ipſis SR, TV parallelis, erit $srut$ vnus ex iſtis tubulis habens pro longitudine ru elementum longitudinis RV totius canalis, et pro amplitudine planum sr; vnde vt habeatur ſumma ſeriei $\frac{b}{m}+\frac{c}{n}---+\frac{\pi}{\omega}$, integrari debet $\frac{ur}{sr}$, quod in pluribus exemplis fieri poteſt algebraice, ex. gr. ſi ST ſit linea recta, h. e. ſi SRVT ſit conus decurtatus ordinarius; Item ſi ST ſit arcus hyperbolae cuiusuis generis ad aſymt. RT.

§. 21. Illuſtremus rem ipſam in priori exemplo: Sit nempe SRVT conus decurtatus, cuius amplitudo antica $SR=m$, poſtica $TV=\omega$, proinde earum ſemidiametri vt $\sqrt{m}$ et $\sqrt{\omega}$; Porro dicatur abſciſſa $Vu=t$,

eius

eius elementum $ur = dt$, ſemidiameter amplitudinis $tu = y$, totaque tubi longitudo RV $=$ L, inuenietur $y = \frac{t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega}}{L}$ ipſa vero amplitudo sr, quae eſt vt $yy = \frac{(t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2}{L^2}$, quare $\frac{ur}{sr} = \frac{L^2 dt}{(t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2}$, cuius integrale debito modo rectificatum $= \frac{Lt}{t\sqrt{m\omega} - t\omega + L\omega}$, adeoque per totum canalem RSTV, ſumendo nempe Vu ſeu $t =$ VR $=$ L, habetur integrale quaeſitum $= \frac{L}{\sqrt{m\omega}} = \frac{b}{m} + \frac{c}{n} - - - + \frac{\pi}{\omega}$: Atque ſic aequatio noſtra generalis §. 20. $(bb - \omega\omega)zdx + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} - - - + \frac{\pi}{\omega})bb\omega dz = \frac{b}{g}pdx$, dabit pro canali ſeu tubo conico, cuius longitudo L et duae amplitudines extremae ſunt m et ω, exiſtente vaſis altitudine b, hanc aequat. $(bb - \omega\omega)zdx + ba\omega dz + \frac{bbL\omega dz}{\sqrt{m\omega}} = \frac{1}{g}bpdx$.

§. 22. Pro caſu Coroll. 1. §. 20. erit quoque $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega xdz = (bba - b\omega x)dx$. Pro caſu Coroll. 2. eiusdem paragr. erit ſumto pro M eodem, $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega xdz = (bba - b\omega x)dx$. Pro caſu Coroll. 3. intelligendum eſt tubum conicum in extremitate ſibi adiunctum habere tubum cylindricum indeterminatae longitudinis, et quidem amplitudinis ω, ita vt in eo aqua propulſa ſemper contineatur, atque percurrat ab initio motus per ſpatium x, Erit tunc $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega xdz + bbxdz = (bba - b\omega x)dx$.

Scholium Generale.

§. 23. Poſſent ex his deriuari plura alia corollaria vtilia non minus quam curioſa et elegantia: Nam quae

ad

ad hanc ſpectant materiam, omne ſuum fundamentum habent in iam traditis et explicatis, licet id non indicauerim expreſſis verbis; ex. gr. ſuppoſuimus quidem aquam aliumue liquorem in primo duntaxat tubo tanquam in vaſe grauitare, indeque vrgeri per canalem ſitum horizontalem habentem, per quem dum mouetur aqua, deſtituitur quaſi ſua propria grauitate. Interim ſi in ipſo canali, ſeu in tubis qui illum componunt, retineat quoque grauitatem ſuam ſiue totam ſiue ſaltem partem, ſic vti accideret ſi tubi non eſſent horizontales, ſed vel verticales vel diuerſimode inclinati ad horizontem, id nullam prorſus habet difficultatem, poteſt enim aquae propria grauitas ex quolibet tubo (per § 2.) transferri in vas vel in tubum primum, adeo vt aqua in reliquis tubis conſiderari poſſit tanquam deſtituta grauitate, ſed translatae grauitationes vna cum pondere aquae in vaſe vel tubo primo iunctim ſumtae ſpectari queant pro eo, quod vocauimus p ſeu vim motricem fundamentalem, a qua fluxus totius maſſae aqueae generatur. Vt ſcilicet

Figura 4. ſi canalis E G B L conſtaret tribus tubis diuerſae amplitudinis AD, GC, BL, quorum primus AD haberet amplitudinem AE vel GD, alter GC amplitudinem GF vel BK, tertius BL amplitudinem BK vel ML; Primus vero debet eſſe verticalis, ſecundus faceret cum horizonte angulum GBN, tertius angulum BMO: Sint amplitudines $AE = b$, $GF = m$, $BK = n$; vis grauitatis ſeu acceleratrix naturalis $= g$; Erit vis motrix in tubo AD aqua pleno $= gb \times AG$. Item ob GB. GN :: $g \frac{g \times GN}{GB}$ = vi acceleratrici aquae liquoris in tubo GC; Item BM. BO ::

BO::$g\,\frac{g \times BO}{BM}$ = vi acceleratrici aquae in tubo BL. Hinc $\frac{g \times GN}{GB} \times mb$ ſeu $gm \times$ GN dabit vim motricem aquae tubi ſecundi, ſimiliter $gn \times$ BO dat vim motricem aquae in tubo tertio.

Sed transferendae iam ſunt vires motrices ex tubis obliquis GC et BL, in verticalem, faciendo $m.b::gm$ GN.$gb\times$GN, et $n.b::gn\times$BO.$gb\times$BO; hunc itaque in modum conſiderari poteſt aqua vniuerſa in tubis tanquam carens grauitate, ſed eius loco preſſa prima columna AD vi motrici expanſa vniformiter per ſuperficiem AE, quae vis eſſet $= gb$(AG + GN + BO) = (ob AG + GN + BO = toti altitudini verticali canalis, quae ſit A) $gb \times A = p$. Atque ita reduximus hunc caſum aliosque ſimiles ad methodum noſtram generalem. Nota, ſi vnus pluresue ex tubis oblique ſurſum dirigatur, erit pro eo aut pro iis vis motrix translata in tubum primum negatiua, eritque ſumenda pro A exceſſus quo affirmatiuarum ſumma ſuperat ſummam negatiuarum, aut viciſſim; vno verbo, A erit exceſſus vel defectus, quo ſuperficies aquae in primo tubo altior eſt humiliorue ſupra horizontem, quam eſt ſuperficies aquae in tubo vltimo. Hoc inſeruit determinationi legis, ſecundum quam liquores oſcillantur in tubis recuruis qualibuscunque: Huc etiam refer problema ſequens a Filio mihi propoſitum ante ſex ſeptemue annos, ſed paulo generalius conceptum.

Problema Hydraulicum.

§. 24. ABCD *eſt vas aqua plenum vsque ad* EF; GI *eſt tubus cylindricus, cuius pars* KI *aqua pariter ple-* Figura 5.

na eſt: Obducto pollice ſuper orificium GO, *tubus immergitur aquae in vaſe contentae, ſed ita tantum vt pars tubi* MI *maior quam* KI *intra aquam externam penetret vsque ad* MN; *Remoto nunc pollice aſcendet* (*ob praeualentem preſſionem aquae externae*) *ſuperficies* KL *atque ab impetu concepto pertinget ſupra ſuperficiem* EF *vsque ad* PQ. *Quaeritur altitudo* MP *vel* NQ, *quousque nempe aqua in tubo aſcendere valet.*

Solutio.

Dicatur pars tubi immerſa HM $=a$, pars eius HK primitus aqua plena $=b$ minor quam a, amplitudo vaſis EF $=h$, amplitudo tubi GO vel HI $=m$. Iam vero aqua tubum circumdans et deorſum nitens ſuo pondere per orificium apertum HI ingredi et aſcendere conatur propellendo partem aquae HL ſuperincumbentem; Actionem iſtam atque effectum hoc modo concipio: Sit ad orificium HI adaptatus alius tubus deorſum ſpectans amplitudinis vaſis $=h$ et altitudinis HM $=a$; Sit hic tubus plenus aqua, ſed tali aqua, quae leuitaret, hoc eſt, quae ſurſum niteretur et quidem tanta vi praeciſe quanta deorſum grauitat aqua (cuius loco illa in tubo per mentis fictionem ſubſtituitur) in vaſe altitudinis MH; proinde erit vis motrix aquae in hoc fictitio tubo ſurſum tendentis $=gha$, et ſic huius reſpectu erit vis motrix in tubo HO aquae HL negatiua $=gmb$, quae translata in tubum fictitium dat ghb, quae vtpote contraria ipſi gha, ab hac ſubducenda eſt, et relinquet $gha-ghb$ ſeu $gh(a-b)$ pro vi motrice, quam vocauimus p; Cui igitur aequandae ſunt vires motrices, quae a gra-

a fluxu generantur per gurgitem formandum ad ingreſſum HI, per tubum HO fluendo et per tubum fictitium aſcendendo. Hinc ſi x vocetur ſpatium ab aqua intra tubum HO percurſum incipiendo a KL, adeoque ſpatium quod ſuperficies aquae in tubo fictitio percurrit aſcendendo $= \frac{m}{b} x$. Itaque ad imitationem ratiocinii §. 13. habebimus vim acceleratricem in tubo HO $= \frac{v\,dv}{dx}$, quae multiplicata per maſſam aquae ſurſum pellendae $mb + mx$, dat vim motricem in hoc tubo $= (mb + mx) \frac{vdv}{dx}$, transferendam in tubum fictitium, vt inde habeamus vim motricem aequipollentem $= (bb + bx) \frac{vdv}{dx}$; Et cum praeterea in tubo fictitio (in quo aqua aſcendit velocitate $\frac{m}{b} v$ per ſpatium $\frac{m}{b} x$) vis motrix propria, non amplius transferenda, ſit $= (ba - mx) \frac{mvdv}{bdx}$; quibus ergo binis viribus addita porro ea quae ad formandum gurgitem requiritur, obtinebimus vim motricem totalem $\frac{bb - mm}{2b} vv + (bb + bx) \frac{vdv}{dx} + (ba - mx) \frac{mvdv}{bdx}$; Verum quia hic p eſt $= gb(a - \frac{m}{b} x - b - x)$ ſeu $g(ba - bb - mx - bx)$, reſultabit aequatio pro determinanda velocitate v, nempe haec $\frac{bb - mm}{2b} vv + (bb + bx + ma - \frac{mm}{b} x) \frac{v\,dv}{dx} = g (ba - bb - mx - bx)$, qua reducta ſcriptoque gz pro $\frac{1}{2} vv$, fiet $(bb - mm) z dx + (bbb + bbx + bma - mmx) dz = (bba - bbb - bmx - bbx) dx$, quae per Lemma eſt integrabilis. Si vas AC ſeu tubus fictitius eſt amplitudinis perquam magnae (qui problematis tacitus eſt ſenſus) emergit aequatio multo ſimplicior (neglectis nempe terminis in quibus m reperitur, ceteriſque per bb diuiſis) ſcilicet haec $z dx + (b + x) dz = (a - b) dx - x dx$,

quae integrata dat $(b+x)z=(a-b)x-\frac{1}{2}xx$, vnde ſi $z=0$, h. e. ſi ſuperficies KL ceſſat aſcendere, id quod fit, quando ad maximam, quousque aſcendere poteſt, altitudinem PQ peruenit, oportet vt tunc etiam $(a-b)x-\frac{1}{2}xx$, ſit $=0$, quocirca $a-b=\frac{1}{2}x$, ſeu $x=2a-2b$; ergo $KP=2KM$.

§. 25. Idem problema ſolui poteſt facilius, ſi conſideretur tanquam caſus §. 13. concipiendo ſcilicet in Fig. 2. vas AF aqua plenum, ab initio fluxus habere altitudinem $=a=MH$ et tubum FC, qui in Fig. 2. eſt horizontalis, iam eſſe verticaliter erectum atque indefinite continuatum, in quo pars infima longitudinis $b=HK$, ſit ab initio aqua plena. Iam ergo ſi a praeualente preſſione columnae aqueae in vaſe, aqua in tubo ſupra b aſcendit per ſpatium $=x$, et proin in vaſe deſcendit per ſpatium $=\frac{m}{b}x$: Habebimus vim motricem in vaſe oriundam a pondere ſuperſtitis aquae $=g(ba-mx)$, ac vim motricem in tubo verticali, priori oppoſitam a pondere totius aquae in tubo exiſtentis venientem $=g(mb+mx)$, quae translata in vas dat $g(bb+bx)$ a priori $g(ba-mx)$ ſubtrahendum, et ita relinquetur $p=g(ba-bb-bx-mx)$, cui aequari debet ſumma trium virium motricium a motu generandarum per gurgitem, per tubum, et per vas, vt inuenimus § 13. quo facto haec ſuppeditatur aequatio $\frac{bb-mm}{2b}vv+\frac{bbvdv+bxvdv}{dx}+\frac{mvdv}{bdx}(ba-mx)=p=g(ba-bb-bx-mx)$, quae coniunctis coniungendis hanc habebit formam $\frac{bb-mm}{2b}vv+(bb+bx+ma-\frac{mmx}{b})\frac{vdv}{dx}=g(ba-bb-mx-bx)$, prorſus eandem quam modo ſupra inuenimus. Ergo etc.

Figura 5.

§. 26.

§. 26. Ex theoria noſtra huc vsque expoſita reddi poteſt ratio phyſica (quam nec *Newtonus* nec quisquam alius recte dedit, ex principiis nempe pure dynamicis) cur ſcilicet corpus cylindricum ſolidum, quod vniformiter mouetur, baſi ſua antrorſum verſa, in fluido continuo infinito eiusdem cum corpore denſitatis, offendat reſiſtentiam aequalem ponderi corporis cylindrici, poſito nimirum velocitatem corporis eſſe aequalem illi quam graue libere cadendo ex altitudine aequali lateri cylindri poſſet acquirere. Ex pluribus, quae mihi ſunt demonſtrationibus, hanc dare lubet theoriae noſtrae hydraulicae in hoc ſcripto ſtabilitae innixam.

Demonſtratio.

Sit cylindrus RMNS, qui moueatur ſecundum directionem lateris MN in fluido ſtagnante aeque denſo, continuo et infinito: Dicatur velocitas cylindri $= v$, latus $MN = a$, baſis ſeu amplitudo $NS = b$; Fingamus loco cylindri ſolidi eſſe tubum MS eadem materia fluida plenum, et per hunc tubum quieſcentem (vbi praeter figuram nihil aliud conſidero) fluere continua et aequabili velocitate v, integrum cylindrum fluidum, ita vt tubus ſemper plenus maneat et quantum per NS effluit tantundem per MR eadem promtitudine reſarciatur per nouum affluxum; attendenti ſit ſtatim manifeſtum, cylindrum hunc fluidum, in effluxu per NS eandem prorſus offendere vim reſiſtentem ab allapſu ad fluidum ſtagnans externum et motui oppoſitum, quam offenderet ipſe cylindrus ſolidus; quia cylindrus fluidus dum mouetur per tubum haberi poteſt pro ſolido, caeteraeque omnes circumſtantiae ſunt Figura 6.

 pa-

pares; videndum ergo eſt ſolummodo, quanta ſit reſiſtentia quam patitur fluidum egrediens in ipſo egreſſus momento. Verum euidens eſt, hanc reſiſtentiam oriri a gurgite TNSV, qui formatur pone orificium tubi NS, cuius gurgitis figura haec eſſe debet, vt in diſtantia quantumuis parua habeat aſymtoton FG perpendicularem ad directionem axi tubi, propterea quoniam ob decreſcentem motum fluidi egreſſi, amplitudines gurgitis viciſſim accreſcere ac breuiſſimo tempore veluti in infinitum dilatari debent, ſuppono enim fluidum ex tubo egrediens non eſſe permiſcibile cum altero extra ſtagnante. Hinc per ea quae §. 9. demonſtrata ſunt, et quia vltima velocitas in gurgite eſt $= 0$, erit vis per gurgitem $= \frac{1}{2} hvv$; adeoque ob conſtantem velocitatem in tubo erit per Coroll. 2. §. 9. $\frac{1}{2} hvv = p = gha$, hoc eſt, $\frac{1}{2} vv = ga$, hinc ſcribendo gz pro $\frac{1}{2} vv$, erit $z = a$, oportet ergo velocitatem requiſitam fluidi in tubo, ad id vt fiat reſiſtentia aequalis ponderi cylindri, eam eſſe debere, quam acquireret graue libere cadens ex altitudine $= a$. Q.E.D.

Corollarium.

Ex demonſtrata hac fundamentali proprietate (antea nondum ſatis accurate ſtabilita) ſequuntur vltro omnia quae de reſiſtentiis fluidorum continuorum et non elaſticorum vulgo traduntur: ſcilicet reſiſtentiae in huiusmodi fluidis perpendiculariter in plana oppoſita corporum exercitae ſunt in ratione compoſita ex duplicata velocitatis relatiuae et ſimplici denſitatis fluidi. Ex hoc denique reliqua deducuntur.

De

De preſſione fluidi in fundum vaſis cylindri (ſine annexo tubo) per foramen effluentis.

1. Eſto vas cylindricum AF fluido conſtanter plenum, cuius amplitudo $AE = b$, longitudo AG vel EF $= a$, amplitudo foraminis $GB = m$. Habeat fluidum in egreſſu, poſtquam aliquamdiu iam effluxit, velocitatem $= v$, ideoque in ipſo vaſe velocitatem $= \frac{m}{b} v$. Sit GL longitudo cylindri cuius baſis m, qui cylindrus deſignet quantitatem fluidi iam egreſſi $= x$. Sit nunc porro velocitas poſtfutura $= u$, et longitudo praedicti cylindri fluidi vlterius egreſſuri $= y$, adeoque longitudo totalis tam egreſſi quam egreſſuri $= x + y$. Concipiamus autem fluidum carere omni grauitate, ac proin nullam aliam habere vim premendi fundum, quam eam, quae a motu pendet; haec vis offendit reſiſtentiam aequalem ab oppoſitione fundi, ob aequalitatem inter actionem et reactionem: Reſiſtentia vero inuenitur, ſi more ſolito quaeratur vis retardatrix, quae velocitatem columnae fluidi imminuit; illaque multiplicata per maſſam columnae, id eſt, per ba dabit reſiſtentiam vel preſſionem in fundum; rem ita perago: Aequatio §. 11. expoſita $\frac{bb-mm}{2b} vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$, in praeſenti caſu (vbi longitudo tubi vtpote abſentis $b = 0$, et pondus columnae fluidi in vaſe $p = 0$) mutatur in hanc aequationem particularem $\frac{bb-mm}{2b} vv + \frac{mavdv}{dx} = 0$, et ponendo u pro v in hanc ſimilem $\frac{bb-mm}{2b} uu + \frac{maudu}{dx} = 0$. Figura 7.

2. Per

2. Per reductionem et ſcribendo dy pro dx (nunc enim x eſt conſtans, dum $x+y$ eſt longitudo indeterminata et variabilis cylindri fluidi egredientis) prouenit aequatio ſub hac forma $\frac{bb-mm}{2b}dy+\frac{madu}{u}=0$; atque integrando $\frac{bb-mm}{2b}(x+y)+malu=malv+\frac{bb-mm}{2b}x$; hoc ita ſcribo adiiciendo duos poſtremos terminos conſtantes rectificationis gratia, eum in finem, vt euaneſcente y et incipiente u ab v, ipſa aequatio fiat identica. Habebitur itaque $mal(\frac{u}{v})=-(\frac{bb-mm}{2b})y$; vnde transeundo ad numeros et ponendo $1=lf$, oritur $uu=vv$ $f^{-(\frac{bb-mm}{bma})y}$.

3. Differentiando probe inuentam hanc aequationem (ſumto nimirum v pro conſtante) habebitur udu $=-vvdy(\frac{bb-mm}{2bma}):f^{\frac{(bb-mm)y}{bma}}$. Eſt autem in vaſe vis acceleratrix negatiua, hoc eſt, abit illa in vim retardatricem $\frac{-mudu}{bdy}$, quae itaque erit $=vv(\frac{bb-mm}{2bba}):f^{\frac{(bb-mm)y}{bma}}$.

4. Haec vis quae nobis vſui in primo tantum momento poſt abolitionem vel ceſſationem ſuppoſitam grauitatis, quam antea columna fluidi in vaſe verticaliter erecto habebat, erit vtique $y=0$, et $vv=2gz$, adeoque vis illa inuenta erit $=gz(\frac{bb-mm}{bba})$, vid. art. 11. vbi $z=$ $(\frac{bba}{bb-mm})\times\left(1-f^{-\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$; quo igitur ſubſtituto, reperietur vis retardatrix $=g\left(1-1:f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$, ac proinde

de multiplicando per maſſam fluidi ha, habetur reſiſtentia vel preſſio in fundum $= gha \left(1 - 1 : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$ a ſolo motu fluidi oriunda, cui ſi praeterea addatur pondus columnae fluidi gha, quod in ſitu verticali conſtanter agit in fundum ſeu moueatur fluidum ſeu quieſcat, prodibit preſſio totalis $= gha + gab \times \left(1 - 1 : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$.

Corollarium.

Si $x = \infty$, erit preſſio totalis $= gha + gha : f^{0} = 2gha$: Eſt enim $f^{0} = 1$. Si vero $x = 0$, preſſio fundi erit $= gha + gha(1 - 1) = gha$, quod vel hinc quoque patet verum eſſe, quia ab initio fluxus ſolum pondus cylindri fluidi agit in fundum; poſtea creſcente x, creſcit etiam preſſio, ita tamen vt nunquam attingat $2gha$ nedum excedat, tametſi eo appropinquet data quauis quantitate propius.

Scholium.

Ne quis autem credat, ponderoſum liquorem in vaſe aliter forſan premere fundum cum ipſe mouetur quam cum quieſcit, non obſtante quod contrarium facile pateat attendenti ad naturam virium immaterialium, vt eſt grauitatis cauſa extra corpus conſiderata, quae vires agunt in inſtanti per totam maſſam animandam, adeoque eodem modo agunt eandemque preſſionem exercent in obſtaculum, ac ſi liquor grauis ei incumbens quieſceret. Probabo tamen per calculum rei veritatem in noſtro caſu; ſtatim vtique liquet, liquorem grauem deſcendendo in vaſe accelerari, debet autem eius vis motrix, quan-

tacunque illa ſit, duas habere partes, quarum vna deſtinatur ad vim retardatricem, a fundo oppoſitam, contraponderandam, altera vero pars reſidua impenditur in accelerationem deſcenſus actualis; Haec vero poſterior illa ipſa eſt, quae habetur ex aequatione §. 11. petenda, nempe $z = (\frac{bba}{bb-mm}) \times \left(1 - 1 : f^{\frac{+(bb-mm)x}{bma}}\right)$, quam differentiando et per g multiplicando habebimus $gdz = (vdv)$ $= \frac{b}{m} g\, dx : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}$, idcirco vis acceleratrix reſidua in vaſe ſeu $\frac{mvdv}{bdx} = g : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}$, cui ſi addatur vis, quam deſtruit, retardatrix ſupra inuenta $g\left(1 - 1 : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$; faciunt ſimul vim acceleratricem $= g$, ideoque preſſionem a pondere oriundam $= gba$, hoc eſt, aequalem ipſi ponderi. Q. E. D.

Atque ita procedendum erit in reliquis caſibus, vbi vnus pluresue tubi adaptati ſunt vaſi, vt ſcilicet ante omnia quaeratur vis retardatrix ad fundum alicuius ex tubis datis, ſupponendo fluidum ſubito amittere ſuam grauitatem, atque tum vi retardatrici inuentae addatur preſſio a ſolo pondere fluidi proueniens, (conſiderando illud tanquam in quiete conſtitutum et ſtagnans) atque propagata vel immediate ad primum fundum vel mediate per praecedentes tubos ad quodcunque cupimus fundum.

Adumbratio calculi inſtituendi pro determinandis ſingulari modo velocitatibus aquae per plures tubos ex vno in alterum fluentis ac ſi ſeorſim per ſingulos ſolitarios effluerent; atque hinc inueniendis preſſionibus in fundum ſingulorum exercitis.

In

In anteceſſum monere oportet, nos hic ſupponere canalem compoſitum ex variis tubis ad ſe inuicem adaptatis qualemcunque habentibus ſitum, verticalem, horizontalem vel inclinatum, ſupponimus porro, canalem aqua conſtanter plenum eſſe, fluxumque perueniſſe ad aequabilitatem, dum tantum liquoris effluit ex quolibet tubo, quantum neceſſe eſt ad ſuppeditandum tubo proxime inferiori, vt adeo vnusquisque conſtanter plenus eſſe, atque ſinguli ita conſiderari queant ac ſi eſſent ſolitarii et ſeorſim poſiti.

Sit longitudo tubi primi et ſupremi $= a$, ſecundi proxime inferioris $= b$, tertii $= c$, etc. amplitudo primi $= h$, ſecundi $= m$, tertii $= n$, quarti $= q$, etc. foramen tubi primi $=$ amplitudini tubi ſecundi $= m$, foramen ſecundi $= n$, foramen tertii $= q$, etc. grauitas naturalis $= g$, grauitas naturalis in diuerſis directionibus obliquis $= \overset{\mathrm{I}}{\gamma}, \overset{\mathrm{II}}{\gamma}, \overset{\mathrm{III}}{\gamma}$ etc. Sit vero grauitas ex actione mutua in tubis adaptatis oriunda pro vaſe ſeu tubo primo $= \overset{\mathrm{I}}{g}$, pro ſecundo $= \overset{\mathrm{II}}{g}$, pro tertio $= \overset{\mathrm{III}}{g}$, etc. Longitudo cylindri aquei egreſſi per foramen primum $= \overset{\mathrm{I}}{x}$, ea per ſecundum $= \overset{\mathrm{II}}{x}$, per tertium $= \overset{\mathrm{III}}{x}$, etc. Altitudo vnde graue delapſum acquirit velocitatem aquae egredientis per foramen primum $= \overset{\mathrm{I}}{z}$, ea quae per ſecundum $= \overset{\mathrm{II}}{z}$, per tertium $= \overset{\mathrm{III}}{z}$, etc. His ita poſitis et reliquis vt ſunt in ſcripto hydraulico, habetur vtique pro tubis ad ſe inuicem adaptatis per translationem virium, et quidem pro ca-

canali duorum tuborum $gha + \overset{I}{\gamma} hb = \overset{I}{g} ha + \overset{II}{g} hb$ vel $ga + \overset{I}{\gamma} b = \overset{I}{g} a + \overset{II}{g} b$; pro canali trium tuborum $ga + \overset{I}{\gamma} b + \overset{II}{\gamma} c = \overset{I}{g} a + \overset{II}{g} b + \overset{III}{g} c$, etc. Has aequationes voco fundamentales. Porro clarum eſt haberi $\overset{I}{z} = \frac{nn}{mm} \overset{II}{z} = \frac{qq}{mm} \overset{III}{z}$ etc. Item $\overset{I}{x} = \frac{n}{m} \overset{II}{x} = \frac{q}{m} \overset{III}{x}$ etc. Habentur autem per §. 11. aequationes ſequentes pro tubis ſolitariis verticaliter erectis:

Pro tubo primo, $g(hh-mm)\overset{I}{z}d\overset{I}{x} + ghmad\overset{I}{z} = \overset{I}{g}hhad\overset{I}{x}$

— — ſecundo, $g(mm-nn)\overset{II}{z}d\overset{II}{x} + gmnbd\overset{II}{z} = \overset{II}{g}mmbd\overset{II}{x}$

— — tertio, $g(nn-qq)\overset{III}{z}d\overset{III}{x} + gnqcd\overset{III}{z} = \overset{III}{g}nncd\overset{III}{x}$

Et ita deinceps.

Nota, ſi quis ex tubis eſſet horizontalis, in aequatione fundamentali euaneſceret γ ad ipſum pertinens, ſic e. gr. ſi tres eſſent tubi, quorum primus tantum verticalis, ſed reliqui duo horizontales, foret aequatio fundamentalis haec $ga = \overset{I}{g}a + \overset{II}{g}b + \overset{III}{g}c$, ſin vero omnes tres eſſent verticales, haec haberetur fundamentalis $g(a+b+c) = \overset{I}{g}a + \overset{II}{g}b + \overset{III}{g}c$.

Quod nunc in hac inueſtigatione palmarium eſt, oportet definire vices grauitatum $\overset{I}{g}, \overset{II}{g}, \overset{III}{g}$ etc ex mutua actione grauitatis naturalis reſultantium, vnde poſtea tam velocitates quam preſſiones in fundo tuborum innoteſcent.

Hoc

Hoc autem ita perago; Ad imitationem operationis adhibitae in §. 11. inuenietur pro ſingulis tubis vt ſequitur:

Pro tubo primo, $\overset{I}{z} = \frac{\overset{I}{g}}{g}\left(\frac{bba}{bb-mm}\times\left(1-1:f^{\frac{bb-mm}{bma}\overset{I}{x}}\right)\right)$

Pro tubo ſecundo, $\overset{II}{z} = \frac{\overset{II}{g}}{g}\left(\frac{mmb}{mm-nn}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{mm-nn}{mnb}\overset{II}{x}}\right)$

Pro tubo tertio, $\overset{III}{z} = \frac{\overset{III}{g}}{g}\left(\frac{nnc}{nn-qq}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{nn-qq}{ncq}\overset{III}{x}}\right)$;

Atque ſic porro.

Quoniam itaque $\overset{I}{z}, \overset{II}{z}, \overset{III}{z}$, vt et $\overset{I}{x}, \overset{II}{x}, \overset{III}{x}$ per ſe inuicem dantur, eſt enim $\overset{I}{z} = \frac{nn}{mm}\overset{II}{z} = \frac{qq}{mm}\overset{III}{z}$, atque $\overset{I}{x} = \frac{n}{m}\overset{II}{x} = \frac{q}{m}\overset{III}{x}$; Subſtituantur valores ſingulorum z et x per vnum expreſſos, et habebuntur tot aequationes, vna pauciores, quot ſunt tubi vel quot ſpecies grauitatis $\overset{I}{g}, \overset{II}{g}, \overset{III}{g}$ etc. nempe ex. gr. pro tribus, ſeruato $\overset{I}{z}$ ad quod reliqua $\overset{II}{z}, \overset{III}{z}$ ſunt reducenda vt et $\overset{II}{x}, \overset{III}{x}$ ad ſeruatum $\overset{I}{x}$: habebuntur hae duae aequationes: $\overset{I}{z}$ vel $\frac{\overset{I}{g}}{g}\left(\frac{bba}{bb-mm}\right)\times\left(1\;1:f^{\frac{bb-mm}{mba}\overset{I}{x}}\right)$ $= \frac{nn}{mm}\overset{II}{z}$ vel $\frac{nn\overset{II}{g}}{mmg}\left(\frac{mmb}{mm-nn}\right)\times\left(\left(1-1\cdot f^{\frac{mm-nn}{mnb}\times\frac{n}{m}\overset{I}{x}}\right)\right)$, idemque illud primum etiam $= \frac{qq\overset{III}{g}}{mmg}\left(\frac{nnc}{nn-qq}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{nn-qq}{nqc}\times\frac{q}{m}\overset{I}{x}}\right)$

Sed cum tres ſint quaerendae grauitatis ſpecies $\overset{I}{g}, \overset{II}{g}, \overset{III}{g}$, alia adhuc requiritur aequatio ad determinationem proble-

 blema-

blematis; Haec autem peti debet ex aequatione fundamentali $ga + \overset{I}{\gamma}b + \overset{II}{\gamma}c = \overset{I}{g}a + \overset{II}{g}b + \overset{III}{g}c$, aut (ſi quidem duo tubi ſupponuntur horizontales) ex hac tantum $ga = \overset{I}{g}a + \overset{II}{g}b + \overset{III}{g}c$, euaneſcunt namque $\overset{I}{\gamma}, \overset{II}{\gamma}$.

Faciamus applicationem, breuitatis gratia, ad caſum ſimpliciſſimum duorum tuborum aqua conſtanter plenorum, quorum primus ſit verticalis, alter horizontalis; ponamusque fluxum perueniſſe ad vniformitatem, hoc eſt, $\overset{I}{x}, \overset{II}{x}$, etc. eſſe $= \infty$. Prodibit vna aequatio ex $\overset{I}{z}$ petita, $\overset{I}{g}(\frac{bba}{bb-mm}) = \frac{nn\overset{II}{g}}{mm}(\frac{mmb}{mm-nn})$, altera vero ex fundamentali, $ga = \overset{I}{g}a + \overset{II}{g}b$, ex quibus rite procedendo elicitur $\overset{I}{g} = \frac{gnn(bb-mm)}{mm(bb-nn)}$, et $\overset{II}{g} = \frac{gbba(mm-nn)}{mmb(bb-nn)}$. Hinc omnia reliqua deriuantur, nempe $\overset{I}{z} = \frac{bbnn}{mm(bb-nn)}$, et $\overset{II}{z} = \frac{bba}{bb-nn}$, prorſus conſentanea iis, quae ſupra demonſtrata dedimus. Item preſſiones in fundum cuiuslibet tubi facillime eruuntur: Quia enim ſinguli tubi conſiderari poſſunt, tanquam eſſent ſolitarii, adhiberi debet formula, quam inuenimus ſupra (pag. 40. n 4) pro tubo primo et vnico, ſcribendo tantum litteras, quae cuilibet alii tubo, tanquam vnico ſeu ſolitario conſiderato, conueniunt: Cum itaque pro illo vnico inuenta ſit preſſio totalis $= gba + gba \times \left(1 - 1 : f^{\frac{bb-mm}{bma}x}\right)$, ſcribendum hic erit pro primo tubo preſſio totalis $= gba + gba \times \left(1 - 1 : f^{\frac{bb-mm}{bma}\overset{I}{x}}\right)$, pro

ſecun-

pro ſecundo $= gmb + gmb \times \left(1 - 1 : f^{\frac{mm-nn}{mnb}\overset{\text{II}}{x}}\right)$, pro tertio $= \overset{\text{III}}{g}nc + \overset{\text{III}}{g}nc \times \left(1 - 1 : f^{\frac{nn-qq}{nqc}\overset{\text{III}}{x}}\right)$; Atque ſubſtitutis valoribus ipſarum $\overset{\text{I}}{g}$, $\overset{\text{II}}{g}$, $\overset{\text{III}}{g}$, vel quia applicationem facimus ad duos tantum tubos, et quidem vbi $x = \infty$, nonniſi ipſarum $\overset{\text{I}}{g}$ et $\overset{\text{II}}{g}$ valores ſubſtitui debent, qui ſunt $\overset{\text{I}}{g} = \frac{gnn(bb-mm)}{mm(bb-nn)}$, et $\overset{\text{II}}{g} = \frac{gbb(mn-nn)}{mmb(bb-nn)}$, habebitur preſſio prima $= 2gba \times \frac{nn(bb-mm)}{mm(bb-nn)}$, et preſſio ſecunda $\frac{2gbba}{m} \times \frac{mm-nn}{bb-nn}$. Si praeterea $b = \infty$ ſed m et n finitae, erit preſſio prima $= 2gba \times \frac{nn}{mm} = \infty$, vt fieri par eſt, ſed preſſio ſecunda $= \frac{2ga}{m} \times (mm - nn) =$ finito.

Hac methodo probe obſeruata inuenientur pro 5 tubis, grauitates $\overset{\text{I}}{g}$, $\overset{\text{II}}{g}$, $\overset{\text{III}}{g}$, $\overset{\text{IV}}{g}$, $\overset{\text{V}}{g}$, vt ſequitur:

$$\overset{\text{I}}{g} = \frac{gbbssa(bb-mm)}{bbmma(bb-ss)}$$

$$\overset{\text{II}}{g} = \frac{bbbssa(mm-nn)}{mmnnb(bb-ss)}$$

$$\overset{\text{III}}{g} = \frac{gbbssa(nn-qq)}{nnqqc(bb-ss)}$$

$$\overset{\text{IV}}{g} = \frac{gbbssa(qq-rr)}{qqrrd(bb-ss)}$$

$$\overset{\text{V}}{g} = \frac{gbbssa(rr-ss)}{rrsse(bb-ss)}$$

Ex hoc laterculo plus ſatis elucet lex progreſſionis pro quocunque numero tuborum: Adeoque in canali conoidico truncato FB, vaſi cylindrico AF adaptato, qui canalis Figura 8.

nalis conſideratur tanquam conflatus ex innumeris tubis infinite paruae longitudinis, inuenietur pro qualibet amplitudine NO, ſpecies grauitatis, qua ſtratum aquae infinite paruae craſſitiei animatur, quando ad aequabilem fluxum peruenerit: dicendo enim amplitudinem $NO = y$, craſſitiem ſtrati aquei $= dx$, reliquasque litteras adhibendo quas hactenus vſurpauimus, erit grauitas animans hoc ſtratum $= \frac{gbb\omega\omega a(2ydy)}{y^4 dx(bb-\omega\omega)} = \frac{gbb\omega\omega a(2dy)}{y^3 dx(bb-\omega\omega)}$; proin pondus ipſum huius ſtrati ſeu preſſio qua vrgetur prodibit, ſi multiplicatur per quantitatem materiae ydx: Erit igitur haec preſſio $= \frac{gbb\omega\omega a(2dy)}{yy(bb-\omega\omega)}$. Huic autem addendae ſunt preſſiones omnium ſtratorum ſequentium ab O vsque ad extremum B, ſed per translationem ad locum O collectae, ſicuti poſtulat methodus noſtra ab initio expoſita, hunc in finem ponuntur tantisper y conſtans, et alia amplitudo variabilis $RS = t$, erit huius ſtrati tdx preſſio $= \frac{gbb\omega\omega a(2dt)}{tt(bb-\omega\omega)}$, quae transferatur ad locum inuariabilem NO, faciendo vt t ad y, ita $\frac{gbb\omega\omega ga(2dt)}{tt(bb-\omega\omega)}$ ad $\frac{gbb\omega\omega ay(2dt)}{tt(bb-\omega\omega)}$, cuius integrale debite correctum dat $\frac{gbb\omega\omega ay}{\omega\omega(bb-\omega\omega)} - \frac{gbb\omega\omega y}{tt(bb-\omega\omega)}$, vbi nunc ponendo $t = y$, habetur $\frac{gbba(yy-\omega\omega)}{y(bb-\omega\omega)} =$ preſſioni totali, qua nimirum aqua in NO comprimitur.

Vt igitur reperiatur z altitudo cylindri aquei cuius baſis eſt y et pondus aequale huic preſſioni; faciendum eſt $gyz = \frac{gbba(yy-\omega\omega)}{y(bb-\omega\omega)}$, vnde $z = \frac{bb(yy-\omega\omega)}{yy(bb-\omega\omega)}$. Ad hanc itaque altitudinem NM haerebit aqua in fiſtula in loco N inſerta; Notandum vero, canalem FPBC, conſiderari tanquam

tanquam habentem diametros amplitudinum maximae FP et minimae CB ſatis paruas reſpectu longitudinis PB, vt nimirum hoc modo tangens curuaturae FNC in quolibet puncto N faciat angulum acutiſſimum cum horizontali PB, ne alias ex alliſione aquae inter mouendum ad canalis latus nimis curuum FNC oriatur noua vis preſſionis (quam hic tanquam accidentalem neglеximus) quae priori ſuperueniens augeret altitudinem NM; quemadmodum id reuera accidit, ſi canalis FB deſinit in laminam perforatam foramine amplitudinis v, cui laminae aqua perpendiculariter impingens augere poteſt compreſſionem in partibus foramini vicinis; in remotioribus augmentum illud minus ſit ſenſibile, variatque prout poſtulat curuatura gurgitis, quam autem a peculiari qualitate aquae aliusue liquoris transfluentis dependere exiſtimo, adeoque generaliter indeterminabilem.

DE COMMVNICATIONE MOTVS IN COLLISIONE CORPORVM SESE NON DIRECTE PERCVTIENTIVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula II et III. QVamnam motus alterationem, ſi duo corpora in ſe mutuo impingant, vtrumque corpus ex colliſione patiatur, quaeſtio eſt iam praeterito ſeculo producta atque multum agitata; huius vero ſeculi annis 1724 et 1726 ab Academia Scientiarum Regia Pariſina de novo cum annexo praemio conſueto publice eſt propoſita: quo factum eſt, vt plures inſignes Geometrae iſtam quaeſtionem accuratiori examini ſubiecerint, ſuasque meditationes iudicio inclytae illius Academiae commiſerint. Hinc aliquot hac de re diſſertationes publici iuris ſunt factae, quibus iſta quaeſtio non ſolum maiore induſtria eſt tractata, ſed etiam ad ſummum certitudinis faſtigium euectae. Quantumuis autem haec materia exhauſta videatur, tamen nonniſi exigua huius quaeſtionis particula etiamnum eſt inueſtigata, atque tota, quam habemus, doctrina de percuſſionibus eſt tantum caſus maxime particularis quaeſtionis, quemadmodum proponi ſolet. Si enim hanc quaeſtionem extendamus ad corpora cuiuscunque figurae, quae quomodocunque in ſe inuicem irruant, regulae communicationis motus adhuc cogni-

cognitae minime ſufficiunt. Quod vt magis fiat perſpicuum ad hoc attendere oportet, quod regulae circa motus communicationem traditae in eiusmodi tantum colliſionibus locum inueniant, in quibus recta corporum in ſe inuicem impingentium centra grauitatis iungens per ipſum punctum impulſus transeat, atque in contactum ſimul ſit normalis; quarnm conditionum niſi vtraque adſit, doctrina, quam de percuſſionibus habemus, perperam adhibetur; et qualis in huiusmogi colliſionibus motus mutatio producatur, adhuc maxime latet. Interim tamen ex his ſatis intelligitur, regulas receptas in colliſione corporum ſphaericorum ſemper tuto vſurpari poſſe, ſi quidem eorum centra grauitatis in ipſa figurae centra incidant. Nam quomodocunque duo globi ſibi mutuo occurrant, recta per eorum centra transiens quoque per punctum contactus transibit, eritque in contactum perpendicularis. Quoties autem contingit, vt duorum corporum ſe mutuo percutientium recta eorum centra grauitatis iungens non per ipſum contactum normaliter transeat, toties regulae conſuetae nullius erunt vſus. Huic igitur defectui cum *Cel. Dan. Bernoulli* ſubuenire ſe inſtituiſſe mihi nuper ſignificaſſet, meque ad eundem laborem ſuscipiendum excitaſſet, tam propter ipſam rei dignitatem quam amicam admonitionem ſtatim hoc negotium ſum aggreſſus; in quo eidem viae, qua ante aliquot annos regulas communicationis motus vulgares elicui, inſiſtens, atque quibusdam nouis a me non pridem detectis principiis mechanicis in ſubſidium vocatis, tandem praefixum attigi ſcopum. Has igitur meditationes meas in ordinem disponere, atque clare explicare viſum

G 2 eſt;

eſt; totamque disquiſitionem tam ad corpora perfecte dura quam elaſtica, quae alias ſeorſim tractari ſolent, accommodabo.

Tabula II. Figura 1. §. 2. Quando duo corpora A et B concurrunt, ea ſe mutuo in puncto C tangent, eritque mihi in ſequentibus hoc punctum C punctum contactus. Fieri quidem poteſt, vt duo corpora concurrentia ſe mutuo in pluribus punctis vel etiam in integra quadam ſuperficiei portione tangant; ſed huiusmodi caſus in praeſenti non ſum contemplaturus, cum tractatu ſint nimis difficiles, atque methodo, qua ſum vſurus, nihilominus, ad calculum reuocari queant. In caſibus ergo, quos euoluere conſtitui, ſemper fiet contactus in puncto quopiam vti in C, quod punctum contactus ſeu punctum impulſus vocabo, ex quo effectus, quem corpora in ſe mutuo exerunt, eſt determinandus. Dabitur ergo planum, quod vtrumque corpus in puncto contactus C tangit, cuius veſtigium in figura eſt recta ECF; hocque planum vocabo planum contactus. Deinceps ſi ad hoc planum ducatur perpendicularis *ef* per punctum contactus C transiens, eam vocabo directionem impulſus, cum corpora concurrentia in ſe mutuo normaliter agant, atque hinc ſe mutuo ſecundum directionem *ef* vrgeant.

§ 3. Ex directione impulſus cum centris grauitatis vtriusque corporis comparata tres oriuntur colliſionum Figura 2. ſpecies. Prima ſpecies, quam colliſionem rectam appellabo, eſt, quando rectae AC et BC quae ex corporum centris grauitatis A et B in punctum contactus C ducuntur, ambae in planum contactus EF ſunt perpendiculares. Hoc ergo caſu recta iungens vtriusque corpo-

poris centra grauitatis per punctum contactus tranſit, et ſimul in planum contactus eſt normalis. Regulae igitur percuſſionis; quae adhuc ſunt erutae, tantum ad has primae ſpeciei colliſiones pertinent. Ad ſecundam ſpeciem refero colliſiones rectobliquas, in quibus altera recta BC, quae ex alterius corporis B centro grauitatis B in punctum contactus C ducitur; eſt normalis in planum contactus; altera vero AC ex centro A alterius corporis A in punctum contactus C ducta in planum contactus EF oblique cadit. Tertiae ſpeciei colliſiones, quas obliquas vocabo, ita erunt comparatae, vt vtraque recta AC et BC, quae ex corporum centris grauitatis A et B in punctum contactus C ducuntur, in planum contactus EF oblique incidat. Figura 3. Figura 4.

§. 4. De prima ergo colliſionum ſpecie ſeu colliſione recta non opus eſt, vt hic verba faciam, cum ea tam ab aliis iam ſatis tractata, quam a me etiam ante aliquot annos eadem methodo, qua hic ſum vſurus, pluribus expoſita ſit. Praeterea autem colliſio recta tanquam ſpecies ſecundae ſpeciei conſiderari poteſt, cum ea facto altero angulo, qui eſt obliquus, quoque recto, in ſpeciem primam abeat, ita vt regulae ad primam ſpeciem ſpectantes in regulis ſecundae ſpeciei contineantur. Simili modo ſpecies ſecunda in tertia comprehenditur, dum alter obliquorum angulorum in rectum abit; adeo vt ſpecies tertia latiſſime pateat, et tam primam quam ſecundam in ſe complectatur. Ne autem in hiſce colliſionibus examinandis nimium diſtinear, nec ad ſolidorum contemplationem, quae ob imaginationis difficultatem tae-

dioſa eſſe ſolet, deducar, alias colliſiones non tractabo, niſi quae in eodem fiunt plano. Hanc ob rem tam motus corporum directiones, quam impulſus directio itemque corporum centra grauitatis et punctum contactus mihi ſemper erunt in eodem plano; huc autem etiam ii caſus, in quibus hoc non contingit, reduci poſſunt, adeo vt hac reſtrictione vniuerſalitati nihil decedat.

§. 5. Quando duo corpora concurrunt, actio quam in ſe mutuo exercent fiet in ipſo puncto contactus et directio vis, qua alterum alterum vrget, erit normalis in planum contactus, ſeu incidet in directionem impulſus. Duo ergo huiusmodi corpora, quae concurrunt, prement ſe mutuo in puncto contactus, et niſi ſint duriſſima, impreſſionem facient, quae impreſſio eo erit maior, quo molliora fuerint corpora, et quo maiore vi in ſe mutuo irruant. Haec autem impreſſio ſiue ſit maior ſiue minor, hoc nihil refert in motuum alteratione, et hanc ob rem eius quantitas non in computum ingredietur. Poſtquam vero talis impreſſio eſt facta corpora ſe vel reſtituent in priſtinam figuram, vel impreſſionem factam retinebunt; illud ſcilicet euenit in corporibus elaſticis, hoc vero in non-elaſticis. Corpora igitur non elaſtica tam diu tantum in ſe mutuo agunt, quoad impreſſiones, quas patiuntur, ſint maximae, tum enim, quia ſeſe non reſtituunt, ceſſabit actio corporum reciproca, et vtrumque ea celeritate, quam hoc momento habet, moueri perget. Corpora vero elaſtica tam diu in ſe mutuo agent, quoad, impreſſiones, quas vtrumque eſt adeptum penitus fuerint reſtitutae. Atque haec eſt eſſentialis differentia inter corpora elaſtica et non elaſtica, ex qua regulae communicationis motus pro vtrisque debent deriuari.

§. 6.

§ 6. Ad mutuam hanc corporum actionem, ex qua alteratio motus in vtroque oritur, cum melius percipiendam, tum facilius explicandam, loco vis, qua corporum particulae, prope contactum ſitae impreſſioni reſiſtunt, in puncto contactus cogitatione ſubſtituo elaſtrum CD, quod quo magis fuerit compreſſum ſeu breuius factum, eo maiore vi ſeſe extendendi et in longitudinem naturalem reſtituendi gaudeat. Qua quidem ratione vis huius elaſtri creſcat pro diminutione longitudinis eius, nihil intereſt ad alterationem motus in colliſione factam determinandam; ſed quaecunque accipiatur ratio, eadem ſemper motus alteratio reperietur. Huius ergo elaſtri imaginarii poſitio CD incidere debebit in directionem impulſus, ſeu normalis erit in planum contactus. Quamdiu igitur hoc elaſtrum comprimitur, vi ſua ſeſe extendendi vrgebit vtrumque corpus; et, ſi corpora non fuerint elaſtica, eius vis ceſſabit ſubito, quando in ſtatum maximae compreſſionis fuerit reductum. At ſi corpora fuerint elaſtica, tum elaſtrum ſeſe in ſitum priſtinum actu reſtituere ponendum eſt, ita vt tamdiu corpora ambo vrgeat, donec naturalem ſuam longitudinem recuperauerit. Hac ergo ratione alteratio motus in colliſione corporum ad effectum potentiarum ſollicitantium eſt reducta. Figura 5.

§. 7. Ad motum ergo, quem duo corpora in ſe inuicem impingentia poſt conflictum ſint habitura, definiendum, requiritur, vt effectum vis elaſtri CD ſeu datae cuiuſcunque vis in corpus datum determinare valeamus: ex his enim ſucceſſiuis elaſtri preſſionibus in vtrum-

vtrumque corpus exercitis coniunctim ſumtis oritur motus vtriusque corporis poſt conflictum. Quamobrem, antequam motus alterationem ex colliſione oriundam determinare liceat, inueſtigari debet, qualem effectum data potentia in dato puncto corpori cuicunque ſiue quieſcenti ſiue moto applicata producat dato tempore. In hoc vero negotio etiamnum caremus ſufficientibus principiis; quae enim habentur et ſatis nota ſunt principia, quibus potentiarum ſollicitationes definiri ſolent, ea tantum corporibus infinite paruis ſunt accommodata, atque ad corpora finitae magnitudinis applicari omnino nequeunt, niſi directio potentiae ſollicitantis per centrum grauitatis corporis transeat. Atque iſte defectus in cauſa eſt, quod colliſiones primae tantum ſpeciei ope horum principiorum explicari potuerint, ad duas reliquas vero ſpecies haec principia non ſufficiant.

§. 8. Cum igitur non ita pridem in haec deſiderata mechanicae principia incidiſſem, ea ad has de colliſionibus quaeſtiones ſoluendas feliciter accommodare licuit. Haec ergo principia imprimis proferre et explicare decet, demonſtrationem autem ſeu methodum, qua ad ea perueni, inſtitutum hoc meum exponere prohibet; ſed alia forte occaſione eorum veritatem firmiſſimis demonſtrationibus declarare licebit. Ante omnia igitur eſt notandum in omni corpore duplicem motum ineſſe poſſe, quorum alter, quem progreſſiuum voco, eſt motus centri grauitatis; alter vero motus, quem gyratorium vocabo, conſiſtit in motu conuerſionis corporis circa centrum grauitatis. Cognitis ergo tum directione et celeritate

ritate centri grauitatis, tum motus gyratorii celeritate et plaga in quam fit, totus corporis motus adaequate cognoſcitur. Motus autem gyratorius fit circa axem per centrum grauitatis transeuntem vel fixum vel mobilem; fixus quidem erit axis, ſi vires centrifugae ſingularum corporis particularum ſe mutuo deſtruant; at ſi ſe non deſtruant, axis ſitum mutabit fietque mobilis. Cum ergo hic tantum motus in eodem plano factos explorare ſit propoſitum, motus gyratorios tantum circa axem fixum conſiderabo.

§. 9. Ex hac inſtituta reſtrictione intelligitur, cuiusmodi ea corpora eſſe debeant, quorum conflictus hic ſum expoſiturus. Corpora ſcilicet ita debebunt eſſe comparata, vt, dum in ſe mutuo impingunt, directio impulſus in idem planum incidat, in quo ſita ſunt corporum collidentium centra grauitatis A et B, atque punctum impulſus C. Quare ſi puncta A, B, C in plano horizontali ſita eſſe ponamus, directio impulſus quoque horizontalis eſſe debebit, id quod eueniet, ſi planum contactus fuerit verticale. Praeterea vero corpora A et B eius indolis eſſe oportet, vt ea circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem libere rotari queant; quae proprietas non in omnia corpora competit. Quamobrem eiusmodi tantum corpora conſiderabimus, quorum axes verticales per omnium ſectionum horizontalium grauitatis centra transeant, quippe quae circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem libere rotari poſſunt. Denique motus directiones quoque in plano horizontali ſitas eſſe pono, quo tam motus ante conflictum quam poſt conflictum in plano horizontali fiant. Fig. 2, 3, 4.

§. 10. Quando quidem directiones, in quibus corpora collidentia mouentur, non fuerint horizontales, ii caſus nihilominus huc facile referuntur ope motus reſolutionis: in conflictu enim motus horizontales tantum variantur, verticalibus immutatis manentibus, ita vt poſt conflictum ope compoſitionis motus determinari queant. Ob hanc igitur reſtrictionem tractatio noſtra non minus generalis erit cenſenda. Reliquae vero duae conditiones omnino cum plurima corpora, tum plurimos impulſus excludunt. Sed huiusmodi caſus partim ob nimiam difficultatem tractandi praetermittere conſtitui, partim quod nonnulli ex modo, quo propoſitos ſum tractaturus, etiam paucis mutandis reſolui queant. In ſequentibus ergo perpetuo id erit tenendum, me tam motuum directiones, quam corporum centra grauitatis vna cum puncto et directione impulſus in eodem plano poſita eſſe intelligere, atque corpora eius tantum indolis admittere, quorum ſectiones horizontales omnes ſua grauitatis centra in eadem recta habeant ſita, quae recta verticalis mihi erit axis gyrationis.

§. 11. His praemiſſis ad principia, quibus ſum vſurus, exponenda progredior, quorum primum eſt, quod omne corpus habens motum progreſſiuum eundem motum vi inſita inertiae aequabiliter in directum perpetuo conſeruet; niſi a viribus externis impediatur. Corporum ergo, qualia hic contemplabor, motus centri grauitatis erit aequabilis in linea recta horizontali, qualemcunque id etiam interea habent motum gyratorium. Secundum principium in hoc conſiſtit, quod corpus eius ſcilicet indolis,

dolis, vti poſui, motum habens gyratorium circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem, hunc quoque motum conſtanter ſeruet aequabilem, quomodocunque interea motus progreſſius in directum immutetur. Ex his duobus principiis conficitur, quod corpus duplici motu praeditum altero progreſſiuo, altero gyratorio circa axem per centrum grauitatis transeuntem, vtrumque motum perpetuo conſeruare debeat, niſi ab externis viribus impediatur. Horum duorum motuum autem vterque ſeorſim cognoſci poteſt, progreſſiuus ſcilicet cognoſcitur ex directione et celeritate centri grauitatis, gyratorius vero ex tempore, quo circa axem gyrationis conuertitur; quod ergo etiam colligetur ex celeritate angulari circa iſtum axem.

§. 12. Cum igitur conſtet cuiusmodi motus corpus ſibi relictum vi propria conſeruet, ſupereſt vt oſtendamus, quomodo vterque motus a potentiis ſollicitantibus tam generetur quam alteretur. Quemadmodum igitur motus corporis progreſſiuus a potentia quomodocunque applicata alteretur, ex ſequente principio intelligetur. Sit corpus A, Figura 6. cuius centrum grauitatis A moueatur in recta AB, in qua ergo ſua, quam habet, celeritate vniformiter progrederetur, niſi a potentiis ſollicitaretur. Sollicitetur autem a potentia Cc ipſi in puncto C applicata, et quaeritur, quomodo iſte centri grauitatis motus ab hac potentia ſollicitante immutetur. Dico autem huius potentiae Cc ad motum progreſſiuum AB alterandum effectum fore eundem, ac ſi tota corporis maſſa in centro grauitatis A eſſet concentrata, eique potentia Aa aequalis et

 paral-

parallela ipſi Cc eſſet applicata. Qui ergo effectus vt definiatur. reſoluatur motus corporis ſecundum AB, in duos laterales inter ſe normales AE et AF, quorum ille tantum a potentia Aa turbabitur. Sit igitur potentia $Cc = p$, maſſa corporis $= A$; celeritas ſecundum $AE = u$ et temporis elementum dt, eritque hoc tempuſculo $du = -\frac{pdt}{A}$; alter vero motus AF hoc tempuſculo inuariatus manebit.

§. 13. Iſta motus progreſſiui alteratio eadem ſemper eſt, quemcunque corpus ſimul habuerit motum gyrationis, ſed ab eadem potentia quoque ipſe motus gyrationis afficitur et turbatur; iſte autem potentiae ſollicitantis effectus in motu gyratorio perturbando ſequenti modo definietur. Sit corpus A, quod praeter motum Figura 7. progreſſiuum habeat motum circa axem verticalem per centrum grauitatis A transeuntem, quaeriturque, quomodo iſte motus gyratorius a potentia Cc alteretur. Fiat motus gyratorius ſecundum ſenſum CgH ſitque celeritas puncti C circa $A = u$, et diſtantia $AC = f$ exprimet $\frac{u}{f}$ celeritatem angularem. Multiplicentur iam omnes corporis particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum reſpectiue ab axe rotationis, ſitque horum factorum aggregatum $= S$. Sit porro potentia $Cc = p$, et ſinus anguli $ACc = m$; atque tempuſculo dt fiet $du = \frac{mffpdt}{S}$, ſeu celeritatis angularis $\frac{u}{f}$ decrementum $\frac{du}{f}$ erit $= \frac{mfpdt}{S}$. Hinc perſpicitur, ſi Cc producta per centrum grauitatis A transeat, tum potentiam motum gyratorium omnino non afficere. Eo maior autem erit motus gyratorii alteratio, quo maiores fuerint tum diſtantia AC, tum ſinus anguli ACc.

§. 14

§. 14. In colliſionibus primae ſpeciei ergo, in quibus directio impulſus per vtriusque corporis centrum grauitatis tranſit, a percuſſionis vi in neutro corpore motus gyratorius generari poteſt, nec, ſi corpora iam ante conflictum motum gyratorium habuerint, is in percuſſione mutabitur. Ad motum ergo ex huiusmodi colliſionibus ortum determinandum ſufficit prius principium noſſe, quo alteratio motus progreſſiui eſt definita. At ad colliſiones ſecundae atque tertiae ſpeciei omnino altero quoque principio opus habemus. In ſecunda enim ſpecie in altero corpore motus gyratorius vel generabitur vel alterabitur, atque in tertia ſpecie in vtroque corpore tam gyratorius motus producetur, quam mutabitur, propter impulſus directionem per neutrius corporis centrum grauitatis transeuntem. Cum igitur leges percuſſionis primae ſpeciei iam ſatis ſint inueſtigatae atque cognitae, a ſecunda ſpecie ordiri conueniet, in qua, qualis mutatio ex colliſione oriatur, determinabo.

§. 15. Quieſcat igitur corpus I H C A, cuius centrum grauitatis ſit in A, eiusque maſſa $= A$; in idque impingat corpus B directe motum celeritate b in directione $\mathfrak{C}B$, ita vt recta $\mathfrak{C}B$ per centrum grauitatis B ducta per punctum impulſus C transeat, ſimulque ſit normalis in planum contactus. Haec ergo colliſio erit ſecundae ſpeciei, quia recta BC in planum contactus eſt normalis. Sit maſſa corporis $B = B$ atque ex A ducatur AC, quae in planum contactus oblique incidat. Sit m ſinus anguli ACB, erit, ducta AG perpendiculari in BC productam, $\frac{AG}{AC} = m$ ſeu $m . AC = AG$. Ponatur TIII. Figura 1

 AG

A G $= f$, et diſtantia B G $= k$, in ipſo impulſus initio, quae diſtantia k propter impreſſiones, quas corpora durante conflictu ſibi inducunt, diminuitur. Quare ſi corpora fuerint elaſtica conflictus tam diu durabit, donec interuallum B G priſtinam obtinuerit longitudinem k; ſin autem corpora non fuerint elaſtica tum conflictus mutuaque actio ceſſabit, quando interuallum B G fuerit minimum. Sit denique ſumma omnium corporis A particularum per quadrata ſuarum ab axe verticali per A transeunte diſtantiarum multiplicatarum $=$ S.

§. 16. Durante ergo conflictu vtrumque corpus in C ſollitabitur a potentia, cuius directio eſt in planum contactus normalis, ideoque corporis B motus diminuetur, dum eius directio immutata manet. Corpori vero A motus progreſſiuus imprimetur ſecundum directionem A α parallelam directioni 𝔅 B ſeu B C (§. 12.). Simul vero corpori A motus gyratorius circa axem verticalem per centrum grauitatis A transeuntem imprimetur, quia directio impulſus B G non per centrum grauitatis A transire ponitur (§. 13.). Durante autem conflictu potentia, qua vtrumque corpus vrgetur eo erit maior, quo minor euadit linea B G; ita vt quantitas huius potentiae a diminutione interualli B G pendeat. Generatim igitur iam conſtat effectus, qui ex huiusmodi colliſione oritur; ſcilicet poſt conflictum corpus B minorem quam ante habebit celeritatem, eandem tamen directionem. Corpus vero A duplicem acquiret motum, alterum progreſſiuum ſecundum directionem A α parallelam directioni 𝔅 B alterum gyratorium circa axem verticalem per A transeuntem in ſenſum C H I.

§. 17.

§. 17. Quo igitur, quanti ſint poſt conflictum hi Figura 2. ſinguli motus, definiam, ſit durante ipſo conflictu corporis A centrum grauitatis in A, corporis B in B. Erit, quia conflictus puncto temporis abſoluitur et impreſſiones ſunt quam minimae, vt ante $AG = f$, et ſinus anguli $ACB = m$; interuallum vero BG ſit $= x$, quod quam minimae a k differat. Sit potentia, qua vtrumque corpus hoc ſtatu ſollicitatur $= p$, quae ergo erit functio quaedam ipſius x, euaneſcens ſi fit $x = k$. Sit corporis B celeritas, quae ipſi adhuc ſupereſt in directione $\mathfrak{C}B$ $= v$; corpus vero A iam habeat motum progreſſiuum in directione $A\alpha$ parallela ipſi $\mathfrak{C}B$, cum celeritate $= u$. Celeritas vero angularis, quam corpus A acquiſiuit ſit $= r$; celeritatem autem angularem metior celeritate, quam punctum quoduis circa axem gyrationis habet, diuiſa per eiusdem puncti ab axe diſtantiam; hic enim quotus ſemper eſt conſtans. Supra vero iam eſt oſtenſum, quomodo celeritatis angularis hac ratione expreſſae incrementum a data potentia nactum determinetur.

§. 18. Perueniant iam elemento temporis dt in ſitus proximos; ſcilicet A in a; B in b; G in g. Eritque $Bb = v\,dt$; $A\alpha = u\,dt$. Ad motum vero angularem cognoſcendum ducatur $a\gamma$ parallela ipſi AG, erit $ga\gamma$ angulus tempuſculo dt motu angulari genitus; qui cum ſit vt celeritas angularis r et dt coniunctim erit $\frac{g\gamma}{AG} = r\,dt$ ſeu $g\gamma = fr\,dt$. Quia vero ante erat $BG = x$, erit nunc $bg = x + dx$. Cum ergo habeatur $Bg = x + u\,dt + fr\,dt = v\,dt + x + dx$, fiet $dx = dt(u - v + fr)$ ſeu $dt = \frac{dx}{u - v + fr}$. Conſideremus iam ſollicitationes tem-

tempuſculo dt a potentia ſollicitante p peractas, eritque per (§. 12.), $dv = \frac{-pdt.}{B}$; $du = \frac{pdt}{A}$; $dr = \frac{m.AC.pdt}{S}$ (§. 13) $= \frac{fpdt}{S}$. Sumtis ergo integralibus erit $v = b - \frac{\int pdt}{B}$; $u = \frac{\int pdt}{A}$; $r = \frac{f\int pdt}{S}$, integrali $\int pdt$ ita accepto vt euaneſcat poſito $t = 0$, hoc eſt in ipſo conflictus initio. Hinc ergo obtinebitur $\int pdt = B(b-v) = Au = \frac{Sr}{f}$, ſeu $B(b-v) = Au = \frac{Sr}{f}$; quae proprietas etiam finito conflictu locum habet.

§. 19. Subſtituto loco dt eius valore $\frac{dx}{u-v+fr}$ habebitur $Bdv = \frac{-pdx}{u-v+fr}$; $Adu = \frac{pdx}{u-v+fr}$ atque $\frac{Sdr}{f} = \frac{pdx}{u-v+fr}$. Hinc formabitur iſta aequatio:

$$\alpha Budv - \alpha Bvdv + \alpha Bfrdv$$
$$+ \beta Audu - \beta Avdu + \beta Afrdu = (-\alpha + \beta + \gamma)pdx$$
$$+ \frac{\gamma Sudr}{f} - \frac{\gamma Svdr}{f} + \gamma Srdr.$$

Ponatur $\alpha = -A$, $\beta = B$, $\gamma = \frac{ABff}{S}$, prodibitque integrando $\frac{ABv^2 + ABu^2 + ABf^2r^2}{2} - ABvu - ABfrv + ABfru = (A + B + \frac{ABff}{S})\int pdx + \frac{ABb^2}{2}$, ſumto $\int pdx$ ita vt euaneſcat poſito $x = k$, hoc eſt in ipſo conflictus initio. Sequentem igitur adepti ſumus aequationem $v^2 + u^2 + f^2 r^2 - 2vu - 2frv + 2fru = b^2 + 2(\frac{1}{B} + \frac{1}{A} + \frac{ff}{S})\int pdx$, ex qua radicem extrahendo prodit $-v + u + fr = \surd(b^2 + 2(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{ff}{S})\int pdx)$. Haec ergo aequatio ſi cum duabus prioribus inuentis coniungatur, prae-

praebebit tres aequationes, ex quibus pro quouis conflictus tempore, tam vtriusque corporis celeritates quam corporis A motus gyratorius poterunt determinari.

§. 20. Ponamus corpora ambo eſſe perfecte elaſtica, quia tum conflictus ceſſat, cum x fuerit priſtinam longitudinem k adeptum, ponamus $x = k$, fietque $\int p\,dx = 0$, quia per hypotheſin $p\,dx$ ita eſt integratum, vt euaneſcat poſito $x = k$. Quamobrem finito conflictu habebitur $b + v = u + fr$; quae aequatio cum aequationibus $B(b - v) = Au = \frac{Sr}{f}$ coniuncta, determinabit vtriusque corporis A et B celeritates poſt conflictum, nec non celeritatem gyratoriam, quam corpus A ex conflictu acquirit. Erit ſcilicet corporis B celeritas poſt conflictum in directione BC $= b - \frac{2ASb}{(A+B)S + ABf^2}$, corporis A vero motus progreſſiuus fiet in directione Aα cum celeritate $= \frac{2BSb}{(A+B)S + ABff}$; corpus vero idem A ſimul habebit motum gyratorium circa axem verticalem per centrum grauitatis A trans euntem cum celeritate angulari $= \frac{2ABfb}{(A+B)S + ABff}$; vbi eſt b corporis B celeritas ante conflictum; $f = AB$; A et B ſunt corporum maſſae, atque S eſt ſumma omnium productorum, quae prodeunt multiplicando ſingulas corporis A particulas per quadrata ſuarum ab axe gyrationis diſtantiarum.

§. 21. Si corpora omni elatere careant, tum conflictus ceſſabit, quando impreſſio, quam impulſus vtrique corpori inducit, eſt maxima facta, hoc eſt, quando interuallum BG fit minimum. Hoc vero accidit, ſi fit $dx = 0$. Cum autem inuenerimus $dx = dt(u - v + fr)$,

 erit

erit $dx = 0$ quando eſt $v = u + fr$; quamobrem ceſſante conflictu mutuaque corporum actione erit $v = u + fr$; quae aequatio coniuncta cum aequationibus $B(b - v) = Au = \frac{Sr}{f}$, dabit quaeſitos valores pro v, u et r, ex quibus motus vtriusque corporis poſt conflictum cognoſcentur. Inuenietur autem corporis B celeritas poſt conflictum $b - \frac{ASb}{(A+B)S + ABf^2}$, eiusque directio erit BC eadem ſcilicet, quae ante. Corporis vero A celeritas ex conflictu acquiſita erit $= \frac{BSb}{(A+B)S + ABf^2}$, hac nempe celeritate centrum grauitatis corporis A in directione $A\alpha$ promouebitur. Motus vero gyratorii, quem corpus A in conflictu adipiſcitur circa axem verticalem per A transeuntem, celeritas angularis erit $= \frac{ABfb}{(A+B)S + ABff}$. Apparet ergo hoc caſu, quo corpora non elaſtica ponuntur, celeritatem corporis A vtramque duplo eſſe minorem, quam pro corporibus elaſticis; itemque decrementum celeritatis corporis B duplo eſſe minus.

§. 22. Si ponamus f euaneſcere, ita vt linea CG ſeu directio impulſus per centrum grauitatis A transeat, quo caſu recta AC normalis erit in planum contactus, tum reſultare debebunt regulae communicationis motus pro colliſionibus primae ſpeciei, iam ſatis quidem notae. Quod, quo eo facilius appareat, faciamus $f = 0$, poſitis corporibus elaſticis, quo facto prodibit corporis B celeritas poſt conflictum $b - \frac{2Ab}{A+B}$; corporis A vero celeritas, qua eius centrum grauitatis progreditur $= \frac{2Bb}{A+B}$, celeritas gyratoria vero euaneſcit; quae regulae apprime conueniunt

ueniunt cum iam inuentis: ſin autem corpora fuerint elateris expertia, erit corporis B celeritas poſt conflictum $= b - \frac{Ab}{A+B}$, et corporis A celeritas $= \frac{Bb}{A+B}$. Ex his ergo cum inuentis formulis comparatis intelligitur corporis B poſt conflictum celeritatem eo maiorem futuram eſſe, quo maius fuerit interuallum $AG = f$; contra vero celeritatem corporis A eo minorem fore. Celeritas vero gyratoria erit $= 0$, tam ſi $f = 0$ quam ſi $f = \infty$; maxima ergo erit, ſi fuerit $(A + B) S = ABff$. hoc eſt, ſi $B = \frac{AS}{Aff - S}$, ſi quidem $Aff > S$.

§. 23. Operae pretium iam erit inueſtigare, quid in huiusmodi colliſionibus conſeruetur, vtrum ante et poſt conflictum quantitas virium viuarum, an vero quantitas motus maneat eadem. Illi enim qui motus quantitatem conſeruari ſtatuunt, leges communicationis motus in colliſionibus primae ſpeciei allegare ſolent, in quibus vtique tam pro corporibus elaſticis quam non elaſticis conſeruatio quantitatis motus perſpicitur; etiamſi corpora non elaſtica ad huiusmodi conſeruationem euincendam non idonea videantur. Nam quicquid vis nomine intelligitur in colliſione corporum non elaſticorum portio quaedam virium neceſſario perire debet, cum ad impreſſiones faciendas vi opus ſit, eaque in corporibus non amplius reſtauretur. In corporibus vero elaſticis ea vis, quae ad impreſſiones impenditur iterum in corpora transfertur, dum impreſſiones ſeſe reſtituunt, ita vt quomodocunque vires metiri velimus, eadem virium quantitas in colliſione corporum elaſticorum conſeruari debeat. Cum autem in colliſionibus corporum elaſtico-

rum primae ſpeciei tam motus quam virium viuarum, prout appellari ſolent, quantitas conſeruetur, lis adhuc ſub iudice verſatur; quam ex colliſionibus ſecundae ſpeciei dirimere licebit.

§. 24. Inuenimus autem pro corporibus tam elaſticis quam non elaſticis hanc aequationem $B(b-v) = Au$, quae dat $Bb = Bv + Au$, ex qua aequabilis centri communis grauitatis progreſſio colligitur. Eſt vero Bb quantitas motus ante conflictum, Bv quantitas motus in corpore B poſt conflictum; quare ſi modo Au exhiberet quantitatem motus in corpore A poſt conflictum, conſeruatio quantitatis motus etiam hic locum teneret. Sed cum corpus A praeter motum progreſſiuum celeritate u habeat motum gyratorium circa centrum grauitatis, maiorem habebit motus quantitatem, quam ſi ſolo motu progreſſiuo moueretur. Ex quo perſpicitur in huiusmodi ſecundae ſpeciei colliſionibus quantitatem motus augeri, ſiue corpora ſint elaſtica ſiue minus; cum ergo vires verae a nihilo multiplicari nequeant, ſatis intelligitur vires per facta ex maſſis in celeritates perperam menſurari. Quod autem ad quantitatem virium viuarum attinet, ea in his etiam colliſionibus mirifice conſeruatur; ſi quidem corpora ponantur elaſtica. Corporis enim A poſt conflictum celeritate progreſſiua u et gyratoria r lati vis viua eſt $= Au^2 + Sr^2$. Corporis B vero vis viua poſt conflictum eſt $= Bv^2$, ita vt ſumma virium viuarum $= Au^2 + Bv^2 + Sr^2$, quae ſi loco u, v, et r valores inuenti §. 20. ſubſtituantur, prodibit Bb^2 vis viua ante conflictum.

§. 25.

§. 25. Impingat globus B ex materia vniformi conſtans, cuius maſſa ſit B, motus in directione βB celeritate b directe in parallelepipedum rectangulum homogeneum EFHI quieſcens ita, vt recta βB in punctum contactus C ſit normalis, atque parallelepipedi centrum grauitatis A eiusque ſectio baſi parallela EFHI per A transiens in eodem poſita ſint plano cum recta βBC. Planum ſcilicet chartae in figura tam parallelepipedum quam globum in duas partes ſimiles et aequales diuidere ponitur. Sit AG $= f$ parallelepipedi longitudo IH $= 2c$ et latitudo FH $= 2g$, atque maſſa parallelepipedi $= A$. Si nunc ſingulae parallelepipedi particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe verticali per centrum grauitatis A transeunte multiplicentur prodibit eorum ſumma $S = \frac{A}{3}(g^2 + c^2)$. Si ergo vtrumque corpus ponatur elaſticum, erit poſt conflictum celeritas corporis $B = b - \frac{2A(g^2+c^2)b}{(A+B)(g^2+c^2)+3Bf^2}$ corporis A vero celeritas progreſſiua in directio Aα parallela directioni βB erit $= \frac{2B(g^2+c^2)b}{(A+B)(g^2+c^2)+3Bf^2}$. Interea vero parallelepipedum circa axem verticalem per A tranſeuntem gyrabitur celeritate angulari $= \frac{6Bfb}{(A+B)(g^2+c^2)+3Bf^2}$. Si corpora non fuerint elaſtica loco coefficientium 2 et 6 medietates 1 et 3 debent collocari. Figura 3.

§. 26. In quaeſtione §. 15. poſuimus corpus A, in quod alterum B impingit, quieſcens, ſed ſolutio non fit difficilior, ſi corpus A tam motum progreſſiuum in directione Aα parallela directioni βb, quam motum gyratorium circa axem verticalem per centrum grauitatis A Figura 1.

 trans-

tranſeuntem tribuamus. Sit itaque celeritas corporis A progreſſiua $= a$, celeritas angularis $= c$, quae fiat in ſenſum CHI. Manentibus ergo iisdem, quibus ſupra vſi ſumus ratiociniis, obtinebimus ſequentes aequationes, $dx = dt(u - v + fr)$ atque $B(b-v) = A(u-a) = \frac{S(r-c)}{f}$. Praeterea ſi corpora fuerint elaſtica erit $-v + u + fr = b - a - fc$, at ſi non fuerint elaſtica habebitur $-v + u + fr = 0$, Quamobrem ſi corpora fuerint elaſtica, erit poſt conflictum celeritas corporis B in directione $\beta B = b - \frac{2AS(b-a-fc)}{(A+B)S + ABff}$, corporis A vero celeritas progreſſiua in directione $A\alpha$ erit $= a + \frac{2BS(b-a-fc)}{(A+B)S + ABff}$. Corporis denique A celeritas angularis, qua poſt conflictum circa axem per A tranſeuntem gyrabitur, erit $= c + \frac{2ABf(b-a-fc}{(A+B)S+ABf}$ Hae vero eaedem expreſſiones pro corporibus non elaſticis valebunt, ſi modo coefficientes 2 omittantur.

Figura 4. §. 27. Quamquam in hac ſolutione poſui vtriusque corporis A et B celeritates eſſe in directionibus inter ſe parallelis et ad planum contactus normalibus, tamen ex eadem ſolutione facile quoque ii caſus reſoluentur, in quibus corporum A et B celeritates ante conflictum quasuis habeant directiones. Moueatur ſcilicet corpus B ante conflictum in directione bB celeritate vt bB, et corpus A in directione Aa celeritate vt Aa. Reſoluantur hi motus in binos laterales inter ſe normales $B\beta$, Bq et $A\alpha$, Ap, quorum alterorum directiones $B\beta$ et $A\alpha$ ſint inter ſe parallelae et in planum contactus normales, alterae vero Bq et Ap ad priores normales. Cum igitur iam conſtet, motus in directionibus qB et Ap factos a con-

a conflictu non turbari, ponantur corpora B et A motibus ϐB et Aα tantum ferri, atque ex §. praecedente definiatur vtriusque motus poſt conflictum. Tum vero iſti motus ex conflictu orti iterum coniungantur cum motibus ſecundum directiones qB et Ap, et motus ex compoſitione orti erunt veri corporum motus poſt conflictum. Motus vero gyratorius corporis A neque ab hac reſolutione nec compoſitione motus afficietur.

§. 28. Quin etiam ex his ſimul intelligitur, ſi directiones, in quibus corpora A et B ante conflictum mouentur, non fuerint in plano horizontali, in quo centra grauitatis corporum A et B vna cum puncto impulſus C eſſe ponimus, motus poſt conflictum ſimili modo determinari poſſe. Hoc autem caſu vtriusque corporis A et B motus in ternos inter ſe normales reſolui debent, quorum vnus ſit in plano horizontali ad planum contactus normalis, ſecundus quoque in plano horizontali ſed plano contactus parallelus, tertius vero in linea verticali et proinde etiam plano contactus parallelus. In conflictu deinceps primi tantum motus conſiderentur, quippe qui ſoli a conflictu perturbantur, et quantam ex conflictu mutationem accipiant, definiatnr. Denique hi motus reſultantes cum reliquis ſecundum leges compoſitionis motus iterum coniungantur, hocque pacto obtinebuntur vtriusque corporis motus poſt conflictum. Motus vero gyratorius corporis A tam ante quam poſt conflictum alius concipi non poteſt, niſi circa axem verticalem. Principia enim, de quibus etiamnum conſtat, ad alios motus gyratorios nonſunt ſufficientia.

§. 29.

§. 29. Progrediamur igitur ad colliſiones tertiae ſpeciei inueſtigandas, ſitque corpus quodcunque A quieſcens cuius maſſa ſit $= A$, et centrum grauitatis in A, in id impingat aliud corpus B, cuius maſſa ſit B, et centrum grauitatis in B; ſit directio corporis B recta ϐB parallela directioni impulſus, et celeritas eius $= b$. Sit C punctum impulſus et EF planum contactus, ad quod per C ducatur normalis GH, in eamque ex A et B perpendicula AG et BA demittantur, erit GH directio impulſus parallela directioni motus ϐB corporis B. Cum igitur in conflictu vtrumque corpus vrgeatur a vi, cuius directio eſt GH, corpori A inducetur motus progreſſiuus ſecundum directionem $A\alpha$ parallelam ipſi HG, corporis B vero celeritas progreſſiua b in directione ϐB minuetur, directione eius, quia eſt parallela ipſi HG, non mutata. Vtrique vero corpori in conflictu motus gyratorius circa axem verticalem per eius grauitatis centrum transeuntem inducetur, quia recta GH per neutrius centrum grauitatis transit. Sit ergo $AG = f$, $BH = h$, et ipſo impulſus initio $GH = k$. Denique ſit ſumma omnium particularum in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe gyrationis multiplicatarum in corpore $A = S$; in corpore B vero $= R$.

Figura 6. §. 30. Durante conflictu teneat recta GH cum corporum centris grauitatis A et B ſitum in figura iisdem litteris repraeſentatum, erit vt ante $AG = f$, et $BH = h$, at cum in conflictu corpora aliquam impreſſionem ſecundum GH ſibi inducant, erit diſtantia GH minor quam k, ſit igitur ea $= x$. Hoc porro in ſtatu ſit corporis B celeritas progreſſiua $= v$, eiusque celeritas angu-

angularis quam iam acquiſiuit $= s$. Corporis A vero celeritas progreſſiua ſit $= u$, et celeritas angularis $= r$. Iam temporis elemento dt, transferantur puncta A, B, G, H in loca a, b, g, h, et ducantur $a\gamma$, $b\eta$ parallelae ipſis AG, BH. Erit ergo $Aa = udt$, $Bb = vdt$, atque ob motus angulares habebitur $g\gamma = frdt$, $\eta h = hsdt$. Interuallum vero gh erit $= x + dx$. At cum ſit $Hg = x + udt + frdt = x + dx + vdt - hsdt$ erit $dx = dt(u - v + fr + hs)$ ſeu $dt = \frac{dx}{u - v + fr + hs}$. Sit porro vis, qua vtrumque corpus vi compreſſionis vrgetur $= p$, erit $dv = \frac{-pdt}{B}$; $du = \frac{pdt}{A}$; $dr = \frac{fpdt}{S}$ atque $ds = \frac{hpdt}{R}$. Hinc ergo fiet $\int pdt = B(b - v) = Au = \frac{Sr}{f} = \frac{Rs}{h}$.

§. 31. Si nunc loco dt ſubſtituatur $\frac{dx}{u - v + fr + hs}$, habebuntur ſequentes aequationes:

$$vdv - udv - frdv - hsdv = \frac{pdx}{B}$$
$$udu - vdu + frdu + hsdu = \frac{pdx}{A}$$
$$fudr - fvdr + ffrdr + fhsdr = \frac{ffpdx}{S}$$
$$huds - hvds + fhrds + hhsds = \frac{h^2 pdx}{R}$$

quae aequationes inuicem additae et integratae dabunt ſequaentem aequationem $v^2 + u^2 + f^2 r^2 + h^2 s^2 - 2uv - 2frv - 2hsv + 2fru + 2hsu + 2fhrs = 2\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{ff}{S} + \frac{hh}{R}\right)\int pdx + b^2$. Integrali $\int pdx$ ita accepto vt euaneſcat poſito $x = k$. Si ergo corpora fuerint perfecte elaſtica, conflictus ceſſabit, ſi x iterum fiat $= k$, quo caſu $\int pdx$ euaneſcit. Si igitur v, u, r, et s,

 cor-

corporum celeritates poſt conflictum denotent, habebitur pro corporibus elaſticis haec aequatio, poſtquam radix quadrata eſt extracta $u-v+fr+hs=b$, quae cum ante inuentis $B(b-v)=Au=\frac{Sr}{f}=\frac{Rs}{h}$ coniuncta dabit

$$v=b-\frac{2ARSb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)};$$
$$u=\frac{2BRSB}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)};$$
$$r=\frac{2ABRfb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)};$$
$$\text{atque } s=\frac{2ABShb}{(A+B)SR+AB(Rff+Shh)}.$$

§. 32. Si corpora omni elaſticitate careant loco aequationis $u-v+fr+hs=b$, hac vti oportet $u-v+fr+hs=0$. Nam cum hoc caſu conflictus mutuaque actio ceſſet, quando impreſſio vtrinque facta eſt maxima; hoc eueniet quando fit $dx=0$. Sed quia eſt $dx=dt(u-v+fr+hs)$, erit $dx=0$, ſi fuerit $u-v+fr+hs=0$. Quamobrem ſi haec aequatio cum ante inuentis $B(b-v)=Au=\frac{Sr}{f}=\frac{Rs}{h}$ coniungatur, prodibit

$$v=b-\frac{ARSb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)};$$
$$u=\frac{BRSb}{(A+B)RS+AB(Rff+hh)}$$
$$r=\frac{ABRfb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)}$$
$$\text{atque } s=\frac{ABShb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)}.$$

Hae igitur ſunt motus communicationis leges pro colliſionibus tertiae ſpeciei, ex quibus ſi ponatur $h=0$. orientur leges pro colliſionibus ſecundae ſpeciei; atque ſi fiat

fiat $f=0$ et $h=0$, tum prodibunt leges notae pro colliſionibus ſpeciei primae. Ex his vero regulis pro corporibus elaſticis iterum conſeruatio virium viuarum conſpicitur.

§. 33. Si corpus A ante conflictum non quieſcat, ſed moueatur celeritate a in directione $A\alpha$ parallela directioni $\mathfrak{B}B$ et directioni impulſus GH; habeatque iam ante conflictum vtrumque corpus motum gyratorium circa axem verticalem, in eum ſenſum vt in conflictu vterque augeatur. Sit corporis A celeritas angularis $=c$, et corporis B celeritas angularis $=e$. Quibus in calculum introductis prodibunt loco ſuperiorum aequationum ſequentes $B(b-v)=A(u-a)=\frac{S(r-e)}{f}=\frac{R(s-e)}{h}$, atque $u-v+fr+hs=b-a-fc-he$ pro corporibus elaſticis, at huius loco $u-v+fr+hs=0$ pro corporibus non elaſticis. Poſt conflictum ergo, ſi corpora ponantur elaſtica, erit corporis A celeritas progreſſiua

$$=a+\frac{2BRS(b-a-fc-he)}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)}.$$

eiusque celeritas angularis

$$=c+\frac{2ABRf(b-a-fc-he)}{(A+B)+RSAB(Rff+Shh)}.$$

Corporis vero B poſt conflictum celeritas erit

$$=b-\frac{2ARS(b-a-fc-he)}{(A+B)R+AB(Rff+Shh)},$$

et eius celeritas angularis

$$=e+\frac{2ABSh(b-a-fc-he)}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)}.$$

Eaedem formulae omiſſis binariis inſeruiunt pro corporibus non elaſticis.

§. 34. Quando ergo corporum directiones motus progreſſiui ante conflictum parallelae fuerint directioni impulſus, tum in conflictu directiones non mutantur. Ex quo intelligitur ſi hae directiones non fuerint parallelae directioni impulſus, tum motus vt ſupra fecimus in laterales eſſe reſoluendos, quorum alteri ſint normales in planum contactus, alteri eidem paralleli. Perſpicuum enim eſt ex principiis mechanicis motus perpendiculares tantum a conflictu turbari, alteros omnino non affici. Quare poſt conflictum ope compoſitionis motus vtriusque corporis motus progreſſiuus poterit determinari. Quod autem ad motus gyratorios attinet, ii a motibus progreſſiuis nullatenus afficiuntur, et hanc ob rem easdem ſequentur leges, quascunque motus progreſſiui teneant directiones. Omnes igitur tres colliſionum ſpecies hic explicatas dedi duplici tamen reſtrictione, quarum prima corpora ſibi ita occurrere ponit, vt eorum centra grauitatis cum directione impulſus in eodem plano ſint poſita; altera vero corpora talia requirit, quae circa axem per centra grauitatis transeuntes et ad illud planum normales libere gyrari queant. Caſus autem in quibus hae conditiones locum non habent, per principia cognita tractare non licet; ſed eorum explicatio maiorem mechanicae promotionem requirit.

SPE-

SPECIMEN ALGEBRAE AD ARCHITECTVRAM MILITAREM APPLICATAE,

AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

SOlent hodie Architecti militares ſubinde ad reſolutionem Problematum quorundam admouere Algebram, cuius inſtituti hinc et inde iam ab aliquo tempore ſpecimina publice apparent; et quod eo maiorem laudem meretur, quo propius ſic grauiſſima muniendi ſcientia ad Geometricam veritatem accedit. Idem inſtitutum hic perſequar, acturus de Propugnaculis munimentorum, Gallice *Baſtions*, quantum quidem per cognitionem harum rerum bellicarum mihi licebit. Tabula IV.

§. 2. Anguli propugnaculorum quantitas, vt ab architectis militaribus determinetur, ſequentes adhibentur ab eis Regulae et Axiomata. Nempe (1.) *Angulus propugnaculi par ſit violentiae tormentorum, vnde non ſit minor 60 gradibus, quia talem ſufficere vſus docuit.* (2.) *Rectus propugnaculi angulus optimus eſt.* Inueniunt nempe ictus tormentorum *rs*, *rs*, ad Faciem propugnaculi perpendiculariter directi, maius obſtaculum in angulo propugnaculi recto BAC, quam acuto BAC; quod idem adhuc magis patet in angulo propugnaculi obtuſo; vnde Figura 1.

 etiam

etiam angulus propugnaculi obtuſus probatur, et in multis muniendi modis antiquis aeque ac recentioribus ſaepiſſime adhibitus fuit. (3.) *Propugnaculi amplitudo ea ſit, quae ſufficientem armatorum numerum capiat, et ſatis praebeat ſpatii ad tormenta dirigenda, caeteraque militaria munia obeunda*; cuius regulae fundamentum per ſe quam maxime intelligitur. Ad hanc itaque praecipue attendam, dum, datis Facie et Ala propugnaculi alicuius, inquirere volo in magnitudinem anguli propugnaculi, quae ipſum propugnaculum ex his conſtruendum efficiat tale, vt ſpatium eo contentum inter omnia reliqua poſſibilia ſit maximum.

§ 3. Problema igitur huc pertinens hunc in modum formare licet. Sit Munimenti alicuius regularis radius
Figura 2. maior DA, huic ſit applicata Facies AB longitudinis a, et Ala BC longitudinis b; poſitio vero huius Alae talis ſit, vt, continuata vsque ad punctum G radii maioris, efficiat ibi angulum conſtantem CGH, cuius ſinus ſit m, coſinus n, poſito ſinu toto $= 1$. Formabitur ſic dimidium propugnaculi alicuius ABC, cuius ſpatium debet eſſe inter omnia reliqua poſſibilia maximum, quaeſito ad hunc finem angulo BAK, cuius ſinum pono $= x$, coſinum $= y$. Demittantur ex B et C perpendiculares BK et CH in radium maiorem, et orietur ſpatium ABCH, ita determinandum, vt ſit maximum. Habebuntur ergo ſequentes Analogiae: ſin. G(m): ſin. A $(x) =$ BA (a) : BG $(\frac{ax}{m})$, hinc CG $= \frac{ax}{m} - b$. In triangulo CHG rectangulo eſt ſin. totus (1): ſin. G $(m) =$ CG $(\frac{ax}{m} - b)$: CH $(ax - bm)$. In triangulo BAK rectan-

rectangulo, eſt ſinus totus (1): ſin. $A(x) = BA(a)$: $BK(ax)$. Quia angulus ABG eundem ſinum habet cum ſuo deinceps poſito, et hic deinceps poſitus aequalis eſt ſummae angulorum A et G, habebitur ſinus $ABG = my + nx$, vnde oritur ſin. $G(m)$: ſin. $ABG(my + nx) = AB(a) : AG\left(\frac{amy + anx}{m}\right)$. Tandem etiam fit in Triangulo rectangulo CHG, ſinus totus (1) ſin. $C(n) = CG\left(\frac{ax}{m} - b\right) : GH\left(\frac{anx}{m} - bn\right)$. Ex his inuenietur area Trianguli $ABG = \frac{AG.BK}{2} = \frac{a^2mxy + a^2nx^2}{2m}$, et area Trianguli $CHG = \frac{HG \times CH}{2} = \frac{a^2nx^2 - 2abmnx + b^2m^2n}{2m}$. Subtracta hac area à priori, reſidua erit area dimidii Propugnaculi $ABCH = \frac{a^2xy + 2abnx - b^2mn}{2}$. Haec, vt fiat maxima, per cognitas regulas de Maximis et Minimis, debet differentiari, et differentiale eius poni $= 0$. Sed ob $y = \sqrt{(1 - x^2)}$, erit $dy = -\frac{xdx}{y}$, quod ſubſtitui debet, vt habeatur aequatio, facta prius diuiſione per adx, haec ſequens, $ay^2 + 2bny = ax^2$, vel ob $x^2 = 1 - y^2$, haec $y^2 + \frac{bn}{a}y = \frac{a}{2a}$, et extracta radice aequationis reperietur tandem $y = \frac{\pm\sqrt{(2a^2 + b^2n^2)} - bn}{2a}$. Si vero ſumeretur quantitas radicalis negatiue accepta, totus valor ipſius coſinus y eſſet negatiuus, conſequenter angulus ipſe BAK fieret obtuſus; quare hoc caſu ſpatium nullum verſus partem D comprehenderetur, ſed verſus oppoſitam; itaque ſemper aſſumi debet $y = \frac{\sqrt{(2a^2 + b^2n^2)} - bn}{2a}$.

§. 4. Quoniam in methodo muniendi antiqua Batauorum angulus Alae et Cortinae ſemper rectus eſt: erit,

erit, ducta LCM perpendiculari ad alam BC, LC pars Cortinae, et LM Polygonum interius; conſequenter LDM angulus ad Centrum in munimento regulari. Demittatur DN perpendicularis ad LM, eruntque GC et DN parallelae, conſequenter angulus CGA, cuius ſinum vocaui m, et coſinum n, erit idem cum NDA, hoc eſt, cum dimidio angulo ad Centrum, in quocunque munimento regulari.

§. 5. Vt iam coſinus y, qui propugnaculo maximam aream tribuit, commodius per Logarithmos inueniatur, pono $a = \frac{pbn}{\sqrt{2}}$, vnde erit $p = \frac{a\sqrt{2}}{bn}$. Subſtituto hoc valore fit $y = \frac{\sqrt{(pp+1)}-1}{p\sqrt{2}}$, aut $py\sqrt{2} = \sqrt{(p^2+1)}-1$.
Figura 3. Sit deſcriptus ſemicirculus ADE, radio AC $= 1$, ex A erecta Tangens AB $= p$, erit ſecans BC $= \sqrt{(p^2+1)}$ conſequenter BD $= \sqrt{(p^2+1)} - 1 = py\sqrt{2}$, aut vero $y = \frac{BD}{p\sqrt{2}}$, ergo y poterit inueniri per ſolos Logarithmos, ſi tantummodo BD cognita fuerit. Sed haec BD obtinetur etiam per ſolos Logarithmos, conſiderato Triangulo BDA. Nam angulus BCA talis eſt, vt eius Tangens ſit p, aut $\frac{a\sqrt{2}}{bn}$; euoluta igitur hac Tangente obtinebitur angulus DCA, qui vocetur A. Demittatur ex C perpendiculum CF in AD, quo facto angulus ACD biſectus erit; efficiet vero tam BAD quam FCA rectum cum FAC, quare erit BAD $=$ FCA $= \frac{1}{2}$A. Erit vero BA(p): BD $=$ ſin. BDA : ſin. BAD $=$ ſin. CDA : ſin.BAD ſin CAD : ſin. FCA $=$ FC : FA $= 1$: tang. $\frac{1}{2}$A; quare ſi haec tangens ipſius $\frac{1}{2}$A vocetur T, erit BD $= p$. T, aut vero $y = \frac{BD}{p\sqrt{2}} = \frac{T}{\sqrt{2}}$, vnde obtento ſemel angulo A facillime reperitur y.

§. 6.

§. 6. Facilitatis gratia applicationem regulae vnico exemplo illuſtrare placet. Sit ex. gr. computandus angulus propugnaculi pro Decagono regulari. Quoniam in methodo muniendi Bataua antiqua Facies ſemper eſt 24 perticarum Rhinland. erit $a = 24$. Alae longitudo eſt numerus laterum munimenti binario auctus, quod vero tantum valet vsque ad Decagonum incluſiue, in reliquis Polygonis Ala conſtanter ſtatuitur 12 perticarum, quare in noſtro exemplo erit $b = 12$. Ex §. 4. apparet, n eſſe coſinum 18°, quia ergo $p = \frac{a\sqrt{2}}{bn}$, vel vocato ſinu toto r ad reſtituendam homogeneitatem, $p = \frac{r^2 a\sqrt{2}}{bn}$, erit

$2lr = 20.0000000$	$lb = 1.0791812$
$la = 1.3802112$	$ln = 9.9782063$
$\frac{1}{2}l2 = 0.1505150$	
21.5307262	11.0573875
11.0573875	
$lp = 10.4733387$	

vnde reperitur $A = 71° 24'$, et $\frac{1}{2}A = 35° 42'$.

$$lT = 9.8564708$$
$$\frac{1}{2}l2 = 0.1505150$$
$$9.7059558$$

cui reſpondent in Tabulis ſinuum 59° 28′, vt adeo pro Decagono regulari angulus propugnaculi, qui hoc maximum et ſpatioſiſſimum efficiat, debeat eſſe 118° 56′. Hac methodo conſtruxi ſequentem laterculum, in quo numerus ſuperior indicat numerum laterum, in Munimen-

 to

tō quodam regulari; medius angulum propugnaculi eum, qui efficit propugnaculum ſpatioſiſſimum; inferior autem oſtendit angulum propugnaculi eum, quem aſſumit *Freitagius*, in methodo muniendi Bataua,

IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
102° 46′	106 28	109 30	112 10	114 36	116 52	118 56	119 8	119 16
60° 0′	72 0	80 0	85 43	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0

quae quidem diuerſitas inter angulos propugnaculi *Freitagianos* et meos valde notabilis eſt; ſed, vt taceam, omnes Architectos militares negare ſe comprehendere poſſe, qua ratione adductus *Freitagius* angulum propugnaculi aſſumſerit aequalem $\frac{2}{3}$ anguli Polygoni: mea propugnacula obtuſangula *Freitagiana* robore ſuperant, iuxta id quod §. 2. allegaui, atque id inſuper largiuntur, vt *Freitagianis* ſint ſpatioſiora, imo ſpatioſiſſima.

§. 7. Sed fateor oriri ſic aliud, et quidem multo maius incommodum, ex hac propugnacula conſtruendi methodo: nempe Facies aut defenſionem plane nullam, aut exiguam, accipiunt ab Alis ſuis oppoſitis; plane nullam accipiunt in Quadrato regulari; valde paruam in Pentagono, maiorem vero in Hexagono, et reliquis; in nullo autem talem quae ſufficere poſſet; vti facile patet Figuris his deſcriptis. Quare negligenda plane eſt haec conſtructio propugnaculorum, quae nihil vtilitatis praebet.

§. 8. Alia itaque ratione idem inſtitutum aggrediar, Fig. 4. nempe ſequente: ſit AD Polygoni cuiuslibet latus exterius; FD, GA, ſint duae lineae defendentes: erit igitur

tur quam maxime ad has lineas reſpiciendum, quod in priori ſolutione non factum eſt, vt propugnacula ex Alis debitam ſuam defenſionem nanciſcantur. Itaque ad hunc ſcopum obtinendum Facies AH propugnaculi aſſumenda erit in ipſa recta AE, et Ala HK demitti ita debet, vt in puncto lineae defenſionis DKF finiatur; quo facto tota haec Ala ad defenſionem Faciei in D conſtruendae vtilis erit, ſiue cum *Pagano* et recentioribus Authoribus perpendiculariter inſiſtat lineae defenſionis, ſiue non. Poterit etiam facile ſic obtineri Ala ſecundaria, quam requirit methodus Bataua antiqua, ſi nempe Alae breuiores HM aſſumantur, et Cortina LM coniungantur. His poſitis quaeratur angulus BAE talis, vt is efficiat triangulum AEF maximum inter omnia poſſibilia; quo ipſo etiam area propugnaculi AHKF, vtpote pars quaedam conſtans prioris trianguli AEF, maxima inter poſſibiles reliquas habebitur.

§. 9. Quia autem aſſumitur munimentum regulare, erit ducta CB perpendiculari ad AD, recta $BA = BD$, angulus $AEB = DEB = FEC$; atque hinc area AEF ſequenti modo inuenitur. Sit $BA = a$, BAC ſinus p, coſ. q tang. m; BAE ſinus x cos. y tang. t; erit EAF ſinus $= py - qx$; poſito ſinu toto $= 1$; ſinus DFA autem $= py + qx$. In triangulo rectangulo ABE habebitur ſin. $BEA(y)$: $BA\ (a) = 1 : AE(\frac{a}{y})$; porro in Triangulo DFA erit ſin. $DFA(py + qx) : DA(2a) =$ ſin. $D(x)$: $AF = \frac{2ax}{py + qx}$, atque ſic obtinebitur area Trianguli $AEF = \frac{AE.AF.\ sin.\ EAF}{2} = \frac{a^2pxy - a^2qx^2}{py^2 + qxy}$; cuius diffe-

rentiale

differentiale ad obtinendum maximum debet poni $= 0$. Quod ſi fiat, ſubrogato $-\frac{ydy}{x}$ pro dx, et reducatur aequatio, praebebit illa hanc $q^2x^2 + 2pqxy = p^2y^2$, aut vero poſitis $\frac{x}{y} = t$, et $\frac{p}{q} = m$, orietur $t = m\sqrt{2} - m$ vel $t = \frac{414.m}{1000}$, vnde fit $BE = \frac{414.am}{1000}$. Datis igitur Polygono exteriori AD, quod *Paganus* in Forma regia maiori 100 perticarum aſſumit, et angulo DAC, ex numero laterum munimenti regularis definiendo, perpendiculum BE facillimo calculo determinatur.

§. 10. Hinc enata eſt ſequens Tabula, in qua pro quolibet numero laterum munimenti regularis, perpendiculum BE reperire licet, in perticis, et eius partibus centeſimis:

	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI	XII
BAC	30° 0′	45° 0′	54° 0′	60° 0′	64° 17′	67° 30′	70° 0′	72° 0′	73° 38′	75° 0′
BE	11.95	20.70	28.49	35.85	42.98	49.97	56.87	63.70	40.48	77.25

§. 11. Apparet ex his, conſtructionem modo dictam efficere munimentum ſatis forte, et plerasque muniendi regulas eam ſeruare. At nouum iam exſurgit incommodum, vnicum quidem, ſed vix tolerandum: fiunt nempe anguli propugnaculorum nimis acuti, id quod robur eorum diminuit, et contra regulam eſt §. 2. adductam; atque, quod minime diffiteor, defectus hic eo magis noxius fit, quo maior aſſumitur numerus laterum munimenti alicuius regularis. Requiritur ad munimenta recte conſtruenda perfectio; ſed perfectio non ſimplex, verum compoſita, in qua regularum haud infrequenter colliſio fit,

ſit, vt vna alteri aduerſetur, id quod ex his etiam maxime fit manifeſtum. Quodſi itaque nihil utilitatis aut commodi ad propugnaculorum conſtructionem hic afferre mihi licuit, id tamen nactus ſum, vt oſtenderim fruſtra ex hoc principio propugnaculorum emendationem peti; ſed ſimul tamen ſpecimen Algebrae ad Architecturam militarem applicatae exhibui; intra cuius limites me contineo.

DE CONSTRVCTIONE AEQVATIONVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Voties in reſolutione problematum ad aequationes differentiales peruenitur, ante omnia inquirendum eſt, an iſtae aequationes integrationem admittant; perfectiſſime enim problema reſolui cenſendum eſt, quod ad conſtructionem aequationis algebraicae deducitur. At ſi aequatio, quod ſaepiſſime euenit, in formam algebraicam nullo modo transmutari poteſt, tum vel quadraturis vel rectificationibus curuarum, quarum conſtructio habetur, ad problemata reſoluenda vti oportet. Ad

hoc vero efficiendum neceſſe eſt, vt aequatio ſolutionem problematis continens, et primi tantum gradus ſit differentialis, et praeterea ſeparationem variabilium admittat; ſi quidem regulis receptis atque iam ſatis cognitis vti velimus, Hoc enim iſtae regulae laborant defectu, vt earum ope neque aequationes differentiales altiorum graduum, neque differentiales primi gradus, quarum ſeparatio non conſtat, conſtrui queant. Hancobrem niſi aequatio ad differentialem primi gradus reduci, ſimulque ſeparatio variabilium detegi poteſt, fruſtra per illas regulas conſtructio aequationis inueſtigatur.

§. 2. Dedi autem ego iam aliquoties ſpecimina methodi cuiusdam peculiaris multo latius patentis, cuius ope non ſolum plures aequationes differentiales ſeparationem variabilium non admittentes conſtruxi, ſed etiam aequationes differentiales ſecundi gradus, quae nequidem ad differentiales primi gradus reduci poterant. Initio quidem ſeriebus infinitis, in quas aequationes propoſitas transmutaueram, ſum vſus, earumque ſummas ad quadraturas reduxi. Tum vero hanc viam non ſatis genuinam iudicans, in methodum directam inquiſiui, qua ad easdem conſtructiones pertingere poſſem. In quo etiam negotio operam non inutiliter collocaui; incidi enim in methodum aequationes modulares eruendi, quarum ope ad conſtructiones difficillimarum aequationum via paratur. Methodum quidem hanc fuſius iam expoſui, ſed illius vſum eximium in conſtruendis aequationibus illo tempore monſtrare non vacabat. Interim tamen nuperrime dedi ſpecimen illarum aequationum, quae ope rectifi-

ctificationis ellipſis conſtrui poſſunt. Nunc vero, quo vſus huius methodi plenius perſpiciatur, caſus nonnullos peruoluam ſpeciales, ex quibus plurimarum aequationum conſtructiones conſequantur. Principia autem ex diſſertatione de infinitis curuis eiusdem generis, quam praecedente anno praelegi, petam.

§. 3 Cum igitur totum negotium ad inuentionem aequationum modularium recidat, ſit $z = \int P dx$, et P functio quaecunque ex x et a aliisque conſtantibus conflata, in qua quidem integratione ipſius $P dx$ ſolum x vt variabilis tractetur. Quaeritur autem ſi integrale $\int P dx$ differentietur ponendo praeter x etiam a variabile, quale differentiale ſit proditurum. Inueniri igitur debet aequatio differentialis vel primi, ſi fieri poteſt, vel altioris cuiusdam gradus, in qua a aeque inſit tanquam variabilis ac x vel z. Huiusmodi ergo aequatio, quam cum *Hermanno* modularem vocaui, tres continebit variabiles z, x, et a; quae autem in aequationem duarum variabilium abibit, ſi vel ipſi z vel x determinatus vel ab a pendens valor tribuatur. Talis vero aequatio quamcunque habuerit formam, et cuiuscunque ſit gradus differentialis, ſemper ope aequationis $z = \int P dx$ conſtrui poterit. Nam ſi pro dato quoque ipſius a valore $\int P dx$ exhibeatur, quod per quadraturas fieri poteſt, et z vel x illi valori aſſignato aequale capiatur, determinabitur altera ipſarum z vel x per a, eiusque ideo quantitas innoteſcit Quocirca hac ratione pro dato alterius indeterminatae valore, alterius quantitas poterit reperiri, in quo ipſa aequationis cuiusuis conſtructio conſiſtit.

§. 4.

§. 4. Aequatio autem modularis erit vel differentialis primi gradus vel ſecundi vel tertii vel altioris cuiusdam, prout functio P fuerit comparata. Ad quod dignoſcendum et ipſam aequationem modularem inueniendam, oportet ſequentes quantitates ex P definire. Primo ſcilicet differentietur P poſito x conſtante et a variabili, hocque differentiale per da diuiſum ſit Q. Tum eodem modo Q differentietur poſito a tantum variabili, et differentiale per da diuidatur; quod prodit ponatur R. Porro ſimili modo differentiando R et per da diuidendo orietur noua quantitas S, ex hacque vlterius T, V etc. Omnes ergo hae quantitates Q, R, S, T etc. ex data functione P erunt cognitae. His iam inuentis poſitoque a iterum conſtante, ſi fuerit $\int Q\,dx = \alpha \int P\,dx + K$, vbi α vtcunque datum eſſe poteſt per a et conſtantes, K vero denotat functionem quamcunque ex a, x et conſtantibus conflatam; tum aequatio modularis erit differentialis primi gradus, quae ex illa obtinetur, ſi loco $\int P\,dx$ ſubſtituatur z et $\frac{dz - P\,dx}{da}$ loco $\int Q\,dx$. Erit ergo aequatio modularis haec $\frac{dz - P\,dx}{da} = \alpha z + K$. Haec vero quantitas K, quia quantitate conſtante quacunque poteſt augeri vel minui, ita eſt accipienda, vt euaneſcat poſito $x = 0$, ſi quidem integrale ipſius $P\,dx$ ita accipi debeat, vt euaneſcat poſito $x = 0$; quod in ſequentibus perpetuo eſt obſeruandum. Loco K ergo ſemper ſcribi poterit K − C, eſtque C quantitas, quae prodit, ſi in K ponatur $x = 0$.

§. 5. Si $\int Q\,dx$ non pendeat a $\int P\,dx$, ideoque aequatio huius formae $\int Q\,dx = \alpha \int P\,dx + K$ inueniri nequeat, videndum eſt, num ſit $\int R\,dx = \alpha \int Q\,dx + \beta \int P\,dx + K$ vbi

vbi iterum α et β per a et conſtantes, K vero per x, a et conſtantes dari ponitur. Si talis formae aequatio poterit formari, tum aequatio modularis erit differentialis ſecundi gradus, repericturque per has formulas, $\int P\,dx = z$, $\int Q\,dx = \frac{dz - P\,dx}{da}$, $\int R\,dx = \frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - Q\,dx}{da}$.
Simili modo ſi vlterius progrediamur ad aequationes, in quibus $\int S\,dx$, $\int T\,dx$ etc. inſunt, tum aequatio modularis differentialis erit altiorum graduum, atque reipſa inuenietur tum ex iſtis formulis tum ex ſequentibus, quae ſunt: $\int S\,dx = \frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - Q\,dx}{da}\right) - R\,dx}{da}$

et $\int T\,dx$ aequatur differentiali huius quantitatis ipſo $S\,dx$ minuto et per da diuiſo. Hocque modo vlterius eſt progrediendum, ſi aequa - modularis ad differentialia altiorum graduum aſcendat.

§. 6. His praemiſſis praeceptis conſiderabo hanc aequationem ſpecialem $z = \int e^{ax} X\,dx$, vbi X functionem quamcunque ipſius x et conſtantium ab a non pendentem ſignificet. Atque primo quidem inueſtigabo, qualem valorem X habere debeat, vt aequatio modularis fiat tantum differentialis primi gradus; ſimulque cuiusmodi aequationes ope formulae $z = \int e^{ax} X\,dx$ conſtrui poſſint. Eſt vero e numerus, cuius logarithmus eſt vnitas, atque integrale ipſius $e^{ax} X\,dx$ ita ſumi pono, vt euaneſcat poſito $x = 0$. Cum igitur ſit $P = e^{ax} X$, et X ab a non pendeat, erit $e^{ax} X\,x\,da$ eius differentiale poſito x conſtante,

 ideoque

ideoque $Q = e^{ax} X x$. Quo ergo aequatio modularis ſit differentialis primi gradus, oportet ſit $\int e^{ax} X dx = \alpha \int e^{ax} X dx + K - C$. Ponamus $K = e^{ax} X p$ et ſumantnr differentialia poſito a conſtante habebitur $e^{ax} X x dx = \alpha e^{ax} X dx + e^{ax} X dp + e^{ax} p dX + e^{ax} a X p dx$ ſeu $X x dx = \alpha X dx + X dp + p dX + a X p d x$. Vnde oritur $\frac{dX}{X} = \frac{x dx - \alpha dx - dp - a p dx}{p}$, vbi pro p talis valor in x accipi debet, vt X ab a omnino non pendens prodeat; at α vtcunque ab a pendens effici poteſt.

§. 7. Inuentis autem hinc idoneis valoribus pro X erit aequatio modularis $dz - e^{ax} X dx = \alpha z da + (e^{ax} X p - C) da$. Ponamus primo eſſe p conſtans $= m$, erit $\frac{dX}{X} = \frac{x dx - (\alpha + m a) dx}{m}$, fiatque $\alpha + m a = b$ ſeu $\alpha = b - m a$, ita vt b et m ab a non pendeant; erit $\frac{dX}{X} = \frac{x dx - b dx}{m}$ et $l X = \frac{x^2 - 2 b x}{2 m}$ atque $X = e^{\frac{x^2 - 2 b x}{2 m}}$; conſtans vero C erit $= m$. Quamobrem ex aequatione $z = \int e^{\frac{x^2 - 2 b x + 2 m a x}{2 m}} dx$ oritur iſta aequatio modularis $d z = (b - m a) z da - m da + e^{\frac{x^2 - 2 b x + 2 m a x}{2 m}} (d x + m d a)$. Haec ergo aequatio, cuicunque functioni ipſius a quantitas x aequalis ponatur, vt duae tantum variabiles z et a ſuperſint, ſemper conſtrui poteſt; quod quidem aliunde iam patet, quia altera variabilis z vnicam habet dimenſionem. At ſi ipſi z datus per a et conſtantes valor tribuatur, habebitur aequatio inter variabiles a et x tantum, quae conſueto more minus tractabilis videtur: interim

rim tamen hoc modo conſtrui poterit, pro quouis ipſius a valore conſtruatur curua, cuius applicata abſciſſae x reſpondens ſit $= e^{\frac{x^2 - 2bx + 2max}{2m}}$ in hacque curua ſumatur area aequalis eidem ipſius a functioni, cui z eſt aequalis, erit abſciſſa hoc modo determinata verus valor ipſius x.

§. 8. Prodierunt haec ex poſitione $p = m$, atque m et b erant quantitates conſtantes a non inuoluentes. Ponamus autem porro $p = \beta + \gamma x$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{x dx - \alpha dx - \gamma dx - \beta a dx - \gamma a dx}{\beta + \gamma x}$, quae expreſſio, quo a ex ea excedat ponatur $\frac{dx}{x} = \frac{fxdx - gdx}{mx + n}$ vbi f, g, m et n non inuoluant a, erit $\beta = \frac{n}{f + ma}$, $\gamma = \frac{m}{f + ma}$ et $\alpha = \frac{g - m - na}{f + ma}$, atque $p = \frac{n + mx}{f + ma}$. Hinc oritur $lX = \frac{fx}{m} - \frac{fn - gm}{m^2} l(mx + n)$ atque $X = e^{\frac{fx}{m}} (mx + n)^{\frac{-fn - gm}{m^2}}$, et $K = e^{ax + \frac{fx}{m}} (mx + n)^{\frac{m^2 - fn - gm}{m^2}} : (f + ma)$, ideoque $C = \frac{n^{\frac{m^2 - fn - gm}{m^2}}}{f + ma}$. Ponatur $f = 0$, quod ſine detrimento vniuerſalitatis fieri poteſt, erit $z = \int e^{ax} (mx + n)^{\frac{-g}{m}} dx$; vnde ſequens orietur aequatio modularis

$$dz = \frac{(g - m - na) z da}{ma} + \frac{e^{ax} (mx + n)^{\frac{-g}{m}} (madx + nda + mxda)}{ma} - \frac{n^{\frac{m-g}{m}} da}{ma}.$$

Detur quomodocunque z per a ita vt ſit $dz +$

 $n^{\frac{m-g}{m}}$

$\frac{n^{\frac{m-g}{m}}da-(g-m-na)zda}{ma}=\frac{A\,da}{ma}$, habebitur conſtru-ctio huius aequationis $A\,da=e^{ax}(mx+n)^{\frac{-g}{m}}(madx+nda+mxda)$, quae quidem facta ſubſtitutione $x=\frac{y-na}{ma}$ facile ſeparatur.

§. 9. Cum igitur hae aequationes, quae ex aequationibus modularibus differentialibus primi gradus eliciuntur, receptas regulas conſtructionum non ſuperent, pregrediendum eſt ad aequationes modulares differentiales ſecundi gradus. Retinebo vero priorem formam $z=\int e^{ax}X\,dx$ et inueſtigabo, cuiusmodi functionem ipſius x eſſe oporteat X, quo aequatio modularis ad differentio-differentialia aſcendat. Erit vero $P=e^{ax}X$, $Q=e^{ax}Xx$, et $R=e^{ax}Xx^2$. quare pono $\int e^{ax}Xx^2dx=\alpha\int e^{ax}Xx\,dx+\beta\int e^{ax}X\,dx+K-C$. Sumatur $K=e^{ax}Xp$, habebitur ſumtis differentialibus $Xx^2dx=\alpha Xxdx+\beta Xdx+X\,dp+pdX+aXpdx$, vnde fit $\frac{dX}{X}=\frac{x^2dx-\alpha xdx-\beta dx-dp-apdx}{p}$. Ponatur $p=\frac{(x-\gamma)(x-\delta)}{a}$ erit $\frac{dX}{X}=\frac{-dp}{p}+\frac{a(\gamma+\delta-\alpha)xdx-a(\gamma\delta+\beta)dx}{(x-\gamma)(x-\delta)}$. Sit $a\gamma+a\delta-\alpha a=f$ ſeu $\alpha=\gamma+\delta-\frac{f}{a}$ et $\beta=\frac{g}{a}-\gamma\delta$, exiſtentibus γ, δ, et f, g, quantitatibus ab a non pendentibus. Erit ergo $\frac{dX}{X}=\frac{-dp}{p}+\frac{fxdx-gdx}{(x-\gamma)(x-\delta)}$ atque $lX-lc=\frac{\gamma f-g-\gamma+\delta}{\gamma-\delta}l(x-\gamma)+\frac{\delta f-g-\delta+\gamma}{\delta-\gamma}l(x-\delta)$ ſeu $X=c(x-\gamma)^{\frac{\gamma f-g-\gamma+\delta}{\gamma-\delta}}(x-\delta)^{\frac{\delta f-g-\delta+\gamma}{\delta-\gamma}}$.

§. 10.

§. 10. Ponatur $\frac{\gamma f-g-\gamma+\delta}{\gamma-\delta}=\lambda$ et $\frac{\delta f-g-\delta+\gamma}{\delta-\gamma}=\mu$. erit $f=\lambda+\mu+2$ et $g=\gamma\mu+\delta\lambda+\gamma+\delta$ Hinc erit $X=c(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}$, $\alpha=\gamma+\delta-\frac{\lambda-\mu-2}{a}$ et $\beta=\frac{\gamma\mu+\delta\lambda+\gamma+\delta}{a}-\gamma\delta$, atque $K=c\frac{e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda+1}(x-\delta)^{\mu+1}}{a}$ et $C=\frac{c(-\gamma)^{\lambda+1}(-\delta)^{\mu+1}}{a}$. Quocirca fiet $z=\int e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}c\,dx$, quae dabit ſequentem aequationem modularem $d\left(\frac{dz-e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}c\,dx}{da}\right)=e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}c\,x\,dx+(\gamma+\delta)\overline{dz-\frac{(\lambda+\mu+2)dz}{a}}-(\gamma+\delta-\frac{\lambda-\mu-2}{a})e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}c\,dx+\frac{(\gamma\mu+\delta\lambda+\gamma+\delta)z\,da}{a}-\gamma\delta z\,da+\frac{e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda+1}(x-\delta)^{\mu+1}c\,da}{a}-\frac{(-\gamma)^{\lambda+1}(-\delta)^{\mu+1}}{a}$

Siue quod eodem redit $z=\int e^{ax}(\varepsilon x+\eta)^{\lambda}(\zeta x+\theta)^{\mu}dx$ dat iſtam aequationem modularem

$$d\left(\frac{dz-e^{ax}(\varepsilon x+\eta)^{\lambda}(\zeta x+\theta)^{\mu}dx}{da}\right)=e^{ax}(\varepsilon x+\eta)^{\lambda}(\zeta x+\theta)^{\mu}x\,dx$$
$$-\left(\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\theta}{\zeta}+\frac{\lambda+\mu+2}{a}\right)(dz-e^{ax}(\varepsilon x+\eta)^{\lambda}(\zeta x+\theta)^{\mu}dx)$$
$$-\left(\frac{\eta(\mu+1)}{\varepsilon a}+\frac{\theta(\lambda+1)}{\zeta a}+\frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}\right)z\,da+e^{ax}(\varepsilon x+\eta)^{\lambda+1}(\zeta x+\theta)^{\mu+1}\frac{da}{\varepsilon\zeta a}$$
$$-\frac{\eta^{\lambda+1}\theta^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a},$$

in qua litterae ε, ζ, η, θ, λ, μ denotant quantitates conſtantes ab a non pendentes.

§. 11. Tribuatur ipſi x valor vel conſtans vel ab a quomodocunque pendens, et ſumto da conſtante loco omnium terminorum, in quibus non ineſt z ſcribatur $A\,da$

denotante A functionem reſultantem ipſius a et conſtantium. Quo facto abibit aequatio modularis in ſequentem aequationem duas tantum variabiles z et a inuoluentem: $ddz + (\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\lambda + \mu + 2}{a})dz + (\frac{\eta(\mu + 1)}{\varepsilon a} + \frac{\theta(\lambda + 1)}{\zeta a} + \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta})z\,da = \mathrm{A}\,da$, ſeu $\frac{ddz}{da} + (b + \frac{c}{a})dz + (f + \frac{g}{a})z\,da = \mathrm{A}\,da$ poſitis $\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} = b$, $\lambda + \mu + 2 = c$, $\frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta} = f$, et $\frac{\eta(\mu + 1)}{\varepsilon} + \frac{\theta(\lambda + 1)}{\zeta} = g$. Haec ergo aequatio differentio-differentialis ope aequationis $z = \int e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^{\lambda})(\zeta x + \theta)^{\mu}\,dx$ poterit conſtrui. Simili modo ſi ipſi z tribuatur valor vel conſtans vel ab a pendens, aequatio modularis abibit in aequationem differentio differentialem inter x et a multo magis implicatam, cuius nihilo minus conſtructio poteſt exhiberi.

§. 12. Quo autem obtineamus aequationes differentialis primi gradus, quae hoc modo conſtrui queant, oportet, vt aequationes ita erutae ad differentiales primi gradus reduci queant. Id quod ſuccederet ſi talis ipſius x valor poſſet aſſignari, vt A euaneſcat, hoc vero admodum difficulter poteſt praeſtari, niſi plures litterarum arbitrariarum definire velimus. Aſſumo ergo aequationem fundamentalem magis compoſitam hanc $z = \mathrm{E}\int e^{ax}(\eta + \varepsilon x)^{\lambda}(\theta + \zeta x)^{\mu}\,dx + \mathrm{F}\int e^{-ax}(\eta - \varepsilon x)^{\lambda}(\theta - \zeta x)^{\mu}\,dx$, vbi E, F, ε, ζ, η, θ, λ, μ ſint quantitates conſtantes ab a non pendentes. Poſito vero vt ante $b = \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\mu}{\varepsilon}$, $c = \lambda + \mu + 2$, $f = \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}$ et $f = \frac{\eta(\mu + 1)}{\varepsilon} + \frac{\theta(\lambda + 1)}{\zeta}$, inuenietur ex hac aequatione ſequens modularis:

d(dz

$$d\left(\frac{dz - Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^\lambda(\theta+\zeta x)^\mu dx - Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^\lambda(\theta-\zeta x)^\mu dx}{da}\right)$$

$$= Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^\lambda(\theta+\zeta x)^\mu x dx - Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^\lambda(\theta-\zeta x)^\mu x dx$$

$$-(b+\tfrac{c}{a})(dz - Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^\lambda(\theta+\zeta x)^\mu dx - Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^\lambda(\theta\ \zeta x)^\mu dx)$$

$$-\left(f+\frac{g}{a}\right)z\,da + \frac{Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda+1}(\theta+\zeta x)^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a} -$$

$$\frac{Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda+1}(\theta-\zeta x)^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a} - \frac{(E-F)\eta^{\lambda+1}\theta^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a}.$$

§. 13. Quo nunc talis valor pro x ſubſtituendus inueniatur, vt omnes termini praeter eos in quibus ineſt z euaneſcant, facio $E=F=1$, quo terminus vltimus euaneſcat. Deinde pono $\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\theta}{\zeta}=0$ ſeu $b=0$, atque facio $x=\frac{-\eta}{\varepsilon}$, vt ambo termini penultimi euaneſcant, ad quod quidem requiritur vt $\lambda+1$ et $\mu+1$ ſint numeri affirmatiui. Quia itaque x conſtantem habet valorem, omnes termini in quibus ineſt dx euaneſcent. Fiat breuitatis gratia $\varepsilon=-1$, $\zeta=1$, et $\eta=\theta=b$, erit $b=0$ $c=\lambda+\mu+2$, $f=-b^2$, et $g=\lambda b-\mu b=b(\lambda-\mu)$. atque aequatio fundamentalis abibit in hanc:

$$z=\int e^{ax}(b-x)^\lambda(b+x)^\mu dx+\int e^{-ax}(b+x)^\lambda(b-x)^\mu dx.$$

In qua ſi ſumatur $x=b$ et a tanquam variabilis tractetur prodibit ſequens aequatio inter z et a, ſi da conſtans ponatur: $\frac{ddz}{da}+\frac{c\,dz}{a}+(f+\frac{g}{a})z\,da=0$, quae in aequationem differentialem primi gradus transmutabitur facto $z=e^{\int t\,da}$, prodibit enim $dt+t^2da+\frac{ct\,da}{a}+(f+\frac{g}{a})da=0$ Ponatur $ta^c=y$ ſeu $t=a^{-c}y$ habebitur $dy+$

y^2da

$\frac{y^2 da}{a^c} + (f a^c + g a^{c-1}) da = 0$. Fiat porro $a^{1-c} = u$; erit $\frac{da}{a^c} = \frac{du}{1-c}$ adeoque $dy + \frac{y^2 du}{1-c} + \frac{f}{1-c} u^{\frac{2c}{1-c}} du + \frac{g}{1-c} u^{\frac{2c-1}{1-c}} du = 0$, ſeu $(\lambda + \mu + 1) dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2\lambda - 2\mu - 4}{\lambda + \mu + 1}} du + b(\lambda - \mu) u^{\frac{-2\lambda - 2\mu - 3}{\lambda + \mu + 1}} du$. Ponatur $\lambda + \mu = m$, $\lambda - \mu = n$, habebitur iſta aequatio $(m + 1) dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2m-4}{m+1}} du + n b u^{\frac{-2m-3}{m+1}} du$ quae conſtrui poteſt ex aequatione $z = \int e^{ax} (b - x)^{\frac{m+n}{2}} (b + x)^{\frac{m-n}{2}} dx + \int e^{-ax} (b + x)^{\frac{m+n}{2}} (b - x)^{\frac{m-n}{2}} dx$. Nam ſi poſt integrationem ita inſtitutam, vt poſito $x = 0$, z euaneſcat, capiatur $x = b$, et pro a ſubſtituatur $u^{\frac{-1}{m+1}}$ habebitur functio ipſius u quae ſit V, erit $y = \frac{-(m+1) dV}{V du}$ qui eſt verus valor ipſius y in aequatione inuenta. Notandum vero eſt $m + n$ et $m - n$ numeros affirmatiuos eſſe debere.

§. 14. Si tam $\frac{m+n}{2}$ quam $\frac{m-n}{2}$ fuerint numeri integri affirmatiui, tum valor ipſius z per integrationem poterit exhiberi, et proinde valor ipſius V reipſa aſſignari. His igitur caſibus aequatio propoſita $(m + 1) dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2m-4}{m+1}} du + n b u^{\frac{-2m-3}{m+1}} du$ more conſueto poterit integrari, eiusque integrale exhiberi. Ponatur ergo $m = i + k$, et $n = i - k$ denotantibus i et k numeros

ris integris affirmatiuis, et habebimus hanc aequationem $(1+i+k)\,dy = y^2\,du - b^2 u^{\frac{-2i-k-4}{i+k+1}}\,du + (i-k)\,b\,u^{\frac{-2i-2k-3}{i+k+1}}$ du; quae non ſolum modo ſupra expoſito conſtrui, ſed etiam conſueto more ſeparari et integrari poterit. Nam in aequatione $z = \int e^{ax}(b-x)^i (b+x)^k\,dx + \int e^{-ax}(b+x)^i$ $(b-x)^k\,dx$ poſt integrationem, quae actu ſuccedet, ita inſtitutam, vt poſito $x=0$ euaneſcat z, ponatur $x=b$ et pro a ſubſtituatur hic valor $u^{\frac{-1}{i+k+1}}$; quo facto z aequabitur functioni cuidam ipſius u, quae ſit V; inuento vero V erit $y = \frac{-(i+k+1)\,dV}{V\,du}$. Si fiat inſuper $k=i$ prodibit aequatio a Com. *Riccato* quondam propoſita $(1+2i)$ $dy = y^2\,du - b^2 u^{\frac{-4i-4}{2i+1}}\,du$, cuius adeo conſtructio vniuerſalis eſt exhibita.

DE FRACTIONIBVS CONTINVIS. *DISSERTATIO.*

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

Varii in Analyſin recepti ſunt modi quantitates, quae alias difficulter aſſignari queant, commode exprimendi. Quantitates ſcilicet irrationales et transcendentes, cuiusmodi ſunt logarithmi, arcus circulares, aliarumque curuarum quadraturae, per ſeries infinitas exhiberi ſolent, quae, cum terminis conſtent cognitis, valores illarum quantitatum ſatis diſtincte indicant. Series autem iſtae duplicis ſunt generis, ad quorum prius pertinent illae ſeries, quarum termini additione ſubtractioneue ſunt connexi; ad poſterius vero referri poſſunt eae, quarum termini multiplicatione coniunguntur. Sic vtroque modo area circuli, cuius diameter eſt $=1$, exprimi ſolet; priore nimirum area circuli aequalis dicitur $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-$ etc. in infinitum; poſteriore vero modo eadem area aequatur huic expreſſioni $\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdot\frac{6.8}{7.7}\cdot\frac{8.10}{9.9}\cdot\frac{10}{11}$ etc. in infinitum. Quarum ſerierum illae reliquis merito praeferuntur, quae maxime conuergant, et pauciſſimis ſumendis terminis valorem quantitatis quaeſitae proxime praebeant.

§. 2. His duobus ſerierum generibus non immerito ſuperaddendum videtur tertium, cuius termini continua diui-

diuiſione inter ſe connectuntur, quas ſeries propterea fractiones continuas appellare conueniet. Minus quidem vſitatum eſt hoc ſerierum genus duobus reliquis; ſed non ſolum aeque diſtincte valorem quantitatis, quam exprimit, ob oculos ponit, verum etiam perquam eſt aptum ad valorem illum proxime inueniendum. Tam parum autem hoc ſerierum genus etiamnum eſt excultum, vt praeter vnam vel alteram huius generis ſeriem iam cognitam, nequidem methodus habeatur vel huiusmodi ſerierum veros valores inueniendi vel datas quantitates transcendentes in tales expreſſiones conuertendi. Cum igitur iam pridem in his fractionibus continuis examinandis laborauerim, atque plura cum ad earum vſum tum inuentionem pertinentia non parui momenti obſeruauerim, ea hic exponere conſtitui, quo aliis viam easdem tractandi planiorem efficerem. Quamuis enim nondum ad completam huius doctrinae theoriam pertigerim, tamen haec, quae magno labore elicui, inſigne adiumentum allatura eſſe confido, ad iſtam doctrinam magis perficiendam.

§. 3. Quo igitur, quid nomine fractionum continuarum intelligam, clarius percipiatur, ampliſſimum earum exemplum ante omnia exhibeo:

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\text{etc.}}}}}}$$

ex quo ſcribendi modo quilibet ſignificationem huius expreſſionis facile cognoſcet. Quantitas ſcilicet haec conſtat duobus membris numero integro a et fractione cuius numerator eſt α, denominator vero iterum ex duobus compoſitus eſt membris integro nimirum b et fractione cuius numerator eſt β, denominator vero rurſum duobus conſiſtit membris integro vide, licet c et fractione vt ante: ſicque porro in infinitum. Duplices hic occurrunt quantitates, quas etiam litteris ex latino et graeco alphabeto deſumtis diſtinxi; Harum quantitatum eas, quas etiam graecis litteris denotaui numeratores appellabo, quia fractionum ſequentium numeratores reuera conſtituunt; reliquas vero quantitates latinis litteris expreſſas ad diſtinctionem omnes denominatores vocabimus; omnes enim praeter primam reuera ſunt partes denominatorum.

§. 4. Primus, qui, quantum mihi conſtat, huiusmodi fractionem continuam protulit, erat Vicecomes *Brouncker*, qui poſt communicatam ſecum *Wallisii* quadraturam circuli, eandem expreſſionem ita commutauit, vt aſſeueraret, aream circuli ſe habere ad quadratum diametri vti 1 ad

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\text{etc.}}}}}}$$

vbi

vbi numeratores ſunt quadrata numerorum imparium, denominatores vero 2. Qua autem via *Brounckerus* in hanc expreſſionem inciderit, non conſtat, atque merito foret dolendum, ſi eius methodus periiſſet; cum non ſit dubitandum, quin eadem methodo plura praeclara in hoc genere exhiberi poſſent. *Walliſius* quidem, dum hanc fractionem recenſet, ipſe demonſtrationem concinnare eſt conatus, quae autem minus eſt genuina, atque penitus ab auctoris methodo diuerſa eſſe videtur. *Walliſius* autem hanc totam inuentionem deriuat ex ſequente theoremate quod ſit:

$$a^2 = \left((a-1)+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)\,\text{etc.}}}}\right) \Bigg| \left((a+1)+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)\,\text{etc.}}}}\right)$$

cuius veritatem per inductionem ſatis confirmat, ſed, quod caput eſt, analyſin non affert, qua ad hoc theorema ſit peruentum.

§. 5. Commode autem atque facile ex data huiusmodi fractione continua valor eius vero proximus poteſt determinari, quin et limites definire licet, intra quos verus valor contineatur, vt, ſi quadratura quaepiam vel alia quantitas tranſcendens hoc modo fuerit expreſſa, facili negotio ea ipſa proxime aſſignari queat. Oſtendam hoc ex generali fractionum continuarum forma:

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\text{etc.}}}}}$$

in qua omnes quantitates ingredientes affirmatiuas pono. Apparet autem valorem vero propinquum obtineri, ſi fractio continua alicubi abrumpatur, atque eo propiorem valorem inuentum iri, quo longius fractio continuetur, Ita ſumendo tantum a habebitur valor minor vero, cum annexa fractio tota negligatur. Sumendo autem $a+\frac{\alpha}{b}$, valor habebitur maior vero, quia in fractione denominator b eſt iuſto minor. Sin autem ſumatur

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}}$$

habebitur iterum valor iuſto minor ob fractionem $\frac{\beta}{c}$, indeque denominatorem $b+\frac{\beta}{c}$ nimis magnum. Atque hoc modo fractionem continuam ſucceſſiue abrumpendo alternatiue valores iuſto maiores et minores prodibunt; vnde quamtumuis prope ad verum fractionis continuae valorem accedere licebit.

§. 6. Sequens igitur habebitur expreſſionum ſeries:

$$a,\ a+\frac{\alpha}{b},\ a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}},\ a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}},\ \text{etc.}$$

qua-

quarum, quae ſunt ordine impares, vt prima, tertia, quinta, etc. minores ſunt vero fractionis continuae valore: pares autem erunt maiores eodem. Quare cum terminus tertius maior ſit primo, quintus maior tertio et ita porro; termini impares creſcendo tandem verum fractionis continuae valorem attingent; termini pares vero, qui continuo decreſcunt, decreſcendo tandem ad verum fractionis continuae valorem deſcendent. Si autem hae expreſſiones in fractiones ſimplices transmutentur, ſequens prodibit earundem expreſſionnm ſeries:

$$\frac{a}{1};\ \frac{ab+\alpha}{b};\ \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta};\ \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}$$

quae ſi attentius inſpiciatur, facile colligetur lex, qua iſti termini progrediuntur; cuiusque ope ſine operoſa fractionum illarum compoſitarum reductione has fractiones, quousque libuerit, continuare licet. Nimis quidem hae fractiones ſtatim fiunt prolixae; ſed in exemplis quibus hae litterae numeris exprimuntur, perquam commode haec ſeries continuatur.

§. 7. Lex autem progreſſionis harum fractionum ex ſequente ſchemate clare percipietur:

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+\alpha}{b}; & \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}; & \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}. & \\ & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

Scilicet his fractionibus ſupra ſcripti ſunt denominatores fractionis continuae, infra vero numeratores tanquam indices; ipſis autem fractionibus praefixa eſt fractio $\frac{1}{0}$, quippe quae ex ipſa lege mox declaranda in hunc locum pertinet.

tinet. Lex iam progreſſionis in hoc conſiſtit vt cuiusque fractionis numerator per indicem ſupra ſcriptum multiplicatus vna cum numeratore praecedentis fractionis per ſuum infra ſcriptum indicem multiplicato praebeat numeratorem ſequentis fractionis: Atque eodem modo cuiusque fractionis denominator per indicem ſuum ſupra poſitum multiplicatus vna cum denominatore praecedentis fractionis per indicem ſuum infra ſcriptum multiplicato praebeat denominatorem fractionis ſequentis. Lex quidem haec ex ipſa inſpectione harum fractionum, ſi vlterius continentur, facile obſeruatur; ſed eadem etiam ex ipſa fractionum continuarum natura deduci poteſt: quam demonſtrationem autem hic apponere ſuperfluum iudico.

§. 8. Si iſtarum fractionum differentiae capiantur, ſubtrahendo quamque a praecedente, ſequens orietur ſeries:

$$\frac{1}{0} - \frac{\alpha}{1.b} + \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} - \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} + \text{etc.}$$

cuius numeratorum progreſſio per ſe eſt manifeſta, denominatores vero ex binis denominatoribus praecedentibus formantur. Cum igitur ſuperioris ſeriei vltimus terminus, qui verum fractionis continuae valorem exhibet, componatur ex primo, quem reiecto $\frac{1}{0}$ ſumamus a, et omnibus differentiis, erit verus fractionis continuae propoſitae valor $=$:

$$a + \frac{\alpha}{1.b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde,} \text{etc.}$$

Habemus adeo ſeriem infinitam primi generis, cuius termini additione et ſubtractione inter ſe coniunguntur, valori fractionis continuae propoſitae aequalem; haecque ſeries valde

valde conuergit, atque ad valorem illum proxime inueniendum admodum eſt apta. Si bini termini coniungantur alternationis ſignorum euitandae cauſa, reperietur eadem fractio continua aequalis ſequenti ſeriei:

$$a + \frac{\alpha c}{1(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma e}{(bc+\beta)(bcde+\beta ae+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)} + \text{etc.}$$

cuius numeratorum et denominatorum lex ex ſuperiore ſponte ſe prodit. Vehementer autem haec ſeries conuergit, atque eius ope citiſſime vero proxima ſumma inueniri poteſt.

§. 9. Quo magis igitur haec ſeries vltima inuenta conuergit, eo magis etiam ipſa fractio continua conuergere cenſenda eſt; quia datus terminorum ſeriei numerus dato fractionum numero fractionis continuae reſpondet. Perſpicuum ergo eſt fractionem continuam eo magis conuergere, quo minores ſint eius numeratores α, β, γ, etc. maioresque denominatores a, b, c, etc. Omnes autem hos numeros tam numeratores quam denominatores integros ponere licet; nam ſi eſſent fracti per notam fractionum reductionem in integros transmutari poſſent, ſingularum ſcilicet fractionum numeratores et denominatores per eundem numerum multiplicando. Poſitis ergo omnibus numeris tam α, β, γ, etc. quam a, b, c, etc. integris fractio continua maxime conuerget, ſi omnes numeratores α, β, γ, etc. aequentur vnitat; deinde vero conuergentia eo erit maior, quo maiores fuerint denominatores a, b, c, d, etc. Vnitate ſcilicet numeratores minores eſſe nequeunt, ſi enim alicubi numerator eſſet $= 0$; ibidem fractio continua abrumperetur, foretque fractio finita. Idem quoque accidit, ſi denominatorum ali-

quis fiat $=\infty$, ibidem enim pariter fractio continua abrumpetur atque in fractionem finitam tranſibit.

§. 10. Si igitur ſequens propoſita ſit fractio continua, cuius omnes numeratores ſint vnitates:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\text{etc.}}}}}}$$

ad eius valorem appropinquabunt fractiones ſequentis ſeriei

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ & \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+c+a}{bc+1}; & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} \end{matrix}$$

quae ſeries ope vnicae indicum a, b, c, d, etc. progreſſionis continuatur. Scilicet cuiusque fractionis tam numerator quam denominator per indicem multiplicatus et praecedentis fractionis numeratore et denominatore reſpectiue auctus, dabit numeratorem et denominatorem ſequentis fractionis. Valor deinde huius fractionis continuae aequabitur ſummae ſequentis ſeriei:

$$a+\frac{1}{1.b}-\frac{1}{b(bc+1)}+\frac{1}{(bc+1)(bcd+d+b)}-\frac{1}{(bcd+d+b)(bcde\ \text{etc.}}$$

vel ſummae huius, in quam iſta transmutatur

$$a+\frac{c}{(bc+1)}+\frac{e}{(bc+1)(bcde+de+be+bc+1)}+\text{etc.}$$

cuius

cuius ſeriei denominatores formantur ex alternis denominatoribus ſeriei fractionum ſuperioris; ideoque facile continuantur.

§. 11. Si in tali fractione continua, cuius numeratores omnes ſunt vnitates, denominatores fuerint numeri fracti, expediet talem fractionem continuam in aliam transformare, in qua tam numeratores quam denominatores ſint numeri integri. Ita ſi huiusmodi propoſita eſſet fractio continua.

$$a + \cfrac{1}{\frac{b}{B} + \cfrac{1}{\frac{c}{C} + \cfrac{1}{\frac{d}{D} + \cfrac{1}{\frac{e}{E} + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

haec tollendis fractionibus particularibus transmutabitur in ſequentem formam:

$$a + \cfrac{B}{b + \cfrac{BC}{c + \cfrac{CD}{d + \cfrac{DE}{e + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo viciſſim quaeuis fractio continua in aliam transmutari poteſt, cuius omnes numeratores ſint vnitates, denominatores vero numeri fracti, erit ſcilicet:

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \cfrac{\zeta}{\text{etc.}}}}}} = a + \cfrac{1}{\frac{b}{\alpha} + \cfrac{1}{\frac{\alpha c}{\beta} + \cfrac{1}{\frac{\beta d}{\alpha\gamma} + \cfrac{1}{\frac{\alpha\gamma e}{\beta\delta} + \cfrac{1}{\frac{\beta\delta f}{\alpha\gamma\zeta} + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}$$

quae poſterior forma ex priore facile formatur.

§. 11. Cum igitur data fractione continua eius valor vel verus ipſe, ſi quidem fractio abrumpatur, vel vero proximus per fractionem ordinariam exhiberi queat; viciſſim quoque fractio ordinaria in fractionem continuam transformari poterit. Quae transmutatio quomodo ſit inſtituenda in fractionibus continuis, quarum numeratores omnes ſint vnitates, denominatores vero numeri integri, primum oſtendam. Omnis autem fractio finita, cuius numerator et denominator ſunt numeri integri finiti in huiusmodi fractionem continuam transformatur, quae alicubi abrumpitur; fractio autem cuius numerator et denominatorſunt numeri infinite magni, cuiusmodi dantur pro quantitatibus irrationalibus et transcendentibus, in fractionem vere continuam et in infinitum excurrentem tranſibit. Ad talem fractionem continuam inueniendam ſufficiet denominatores tantum aſſignaſſe, cum numeratores omnes vnitates eſſe ponamus. Hi vero inuenientur inter numeratorem et denominatorem fractionis propoſitae eandem operationem inſtituendo, quae ad maximum earum commu-

nem

nem diuiſorem inueſtigandum inſtitui ſolet. Numerator ſcilicet per denominatorem diuidatur, et per reſiduum ipſe denominator, et ita porro ſemper per reſiduum praecedens diuiſor. Quoti vero ex hac continuata diuiſione orti erunt denominatores fractionis continuae quaeſiti.

§. 12. Sic ſi haec propoſita ſit fractio $\frac{A}{B}$ in fractionem continuam transmutanda, cuius omnes numeratores ſint vnitates; diuido A per B, ſitque quotus a et reſiduum C, per hoc reſiduum C diuidatur praecedens diuiſor B, ſitque quotus b reſiduumque D, per quod C diuidatur et ita porro donec ad reſiduum $= 0$, quotumque infinite magnum perueniatur. Operatio autem haec ſequenti modo repraeſentatur.

$$\begin{array}{llllll}
B \mid A \mid a & & & & & \\
\quad C \mid B \mid b & & & & & \\
\qquad D \mid C \mid c & & & & & \\
\qquad\quad E \mid D \mid d & & & & & \\
\qquad\qquad F \mid E \mid e & & & & & \\
\qquad\qquad\quad G \text{ etc.} & & & & &
\end{array}$$

Hac igitur operatione inueniuntur quoti, a, b, c, d, e, etc. quibus cognitis erit

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

ſi enim ſit reſiduum $G=0$, erit $e=\frac{E}{F}$ atque $\frac{1}{e}=\frac{F}{E}$ hincque porro $d+\frac{1}{e}=d+\frac{F}{E}=\frac{D}{E}$; ac $\frac{1}{d+\frac{1}{e}}=\frac{E}{D}$;

$c+\frac{1}{d+\frac{1}{e}}=c+\frac{E}{D}=\frac{C}{D}$. Hocque modo vsque ad initium aſcendendo fractio continua reperietur $=\frac{A}{B}$.

§. 13. Si in fractione $\frac{A}{B}$ fuerit $A<B$ tum primus quotus a erit $=0$, reſiduumque primum $=A$, ita vt tum B per A diuidi debeat. Hoc ergo caſu erit

$$\frac{A}{B}=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}$$

Caſu autem quo $A<B$ vnicus in fractione continua prodibit terminus, ſi ratio inter A et B fuerint multipla; duobus autem conſiſtet fractio continua denominatoribus, ſi ratio A:B pertinnat ad genus rationum ſuperparticularium, plures vero aderunt denominatores, ſi ratio A:B ad genus ſuperpartientium referatur. Reuera autem fractio continua in infinitum excurret, ſi ratio A ad B non fuerit vt numeri ad numerum, ſed vel irrationalis vel transcendens. Ad huiusmodi autem expreſſiones in fractiones continuas transmutandas, oportet vt numeris rationalibus ſint expoſitae ſaltem vero proxime, quemadmo-

admodum hoc fieri ſolet per fractiones decimales. Tales igitur expreſſiones ſi habeantur, modo praeſcripto fractiones continuae formabuntur.

§. 14. Cum autem fractio vel alia expreſſio in huius modi fractionem continuam fuerit conuerſa, tum eius expreſſionis valor proximus modo §. 10. expoſito poterit aſſignari. Vti ſi inuenta fuerit haec expreſſio.

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

atque ex denominatoribus a, b, c, d, etc. formetur ſequens fractionum ſeries

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+c+a}{bc+1}; & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} \text{ etc.} \end{array}$$

hae fractiones proxime aequales erunt expreſſioni $\frac{A}{B}$, eoque minus diſtabunt, quo remotiores fuerint a prima. Ita autem quaelibet harum fractionum erit comparata, vt alia per numeros non maiores exhiberi nequeat, quae propius ad valorem $\frac{A}{B}$ accederet. Hoc itaque modo ſequens problema commode ſoluetur: *Datam fractionem ex magnis numeris conſtantem in ſimpliciorem conuertere, quae ad illam propius accedat, quam fieri poteſt numeris non maioribus.* Problema hoc Walliſius magno ſtudio pertractauit, ſolutionem vero dedit vehementer operoſam atque difficilem.

§. 15.

§. 15. Ad methodum noſtrum ad ſolutionem huius problematis auccommodandam, ſit propoſita fractio $\frac{355}{113}$, quae ſecundum *Metium* rationem peripheriae ad diametrum proxime exprimit; quaeramus igitur fractiones minoribus numeris conſtantes ab iſta fractione tam parum diſcrepantes, quam fieri poteſt. Diuido ergo 355 per 113 atque inuenio

$$\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{16}}$$

vnde formo ſequentes fractiones:

3,	7,	16,	
$\frac{1}{0}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{22}{7}$;	$\frac{355}{113}$

fractiones ergo $\frac{3}{1}$ et $\frac{22}{7}$ propius ad fractionem $\frac{355}{113}$ accedunt, quam vllae aliae numeris non maioribus compoſitae; erit autem altera $\frac{22}{7}$ maior, altera $\frac{3}{1}$ minor quam propoſita, vti iam ſupra in genere annotauimus. Has fractiones principales appellare liceat, nam praeter has aſſignari poſſunt aliae minus principales quaeſito aeque ſatisfacientes; ſcilicet vti fractio $\frac{22}{7}$ ex praecedentibus cum indice 7 eſt formata, ita minus principales eodem modo formabuntur, loco 7 minores numeros ſingulos ſubſtituendo.

§. 16. Si autem ratio peripheriae ad diametrum exactior accipiatur, diuiſioque continua vti eſt praeceptum inſtituatur, ſequens quotorum ſeries prodibit 3, 7, 15, 1, 292,

1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14 etc. ex quibus ſequenti modo fractiones ſimpliciores eruentur.

	3,	7,	15,	1,	292,	1,	
$\frac{1}{0}$,	$\frac{3}{1}$;	$\frac{22}{7}$;	$\frac{333}{106}$;	$\frac{355}{113}$;		$\frac{103993}{33102}$	*principales.*
	$\frac{2}{1}$,	$\frac{19}{6}$;	$\frac{311}{99}$;			$\frac{103638}{32989}$	*minus principales.*
	$\frac{1}{1}$;	$\frac{16}{5}$;	$\frac{289}{92}$			; $\frac{103283}{32876}$	
		; $\frac{13}{4}$;	$\frac{267}{85}$			; $\frac{102928}{32763}$	
		; $\frac{10}{3}$;	$\frac{245}{78}$			etc.	
		; $\frac{7}{2}$;	$\frac{223}{71}$				
		; $\frac{4}{1}$;	$\frac{201}{64}$				
			etc.				

Hoc igitur pacto duplices fractiones nacti ſumus, quarum aliae nimis ſunt magnae, aliae nimis paruae; nimis magnae ſcilicet ſunt, quae ſub indicibus 3, 15, 292, etc. continentur, reliquae nimis ſunt paruae. Atque hinc facile integram tabulam *Wallifianam* condere licet, quae omnes complectitur rationes ad veram peripheriae ad diametrum rationem propius accedentes, quam fieri poteſt numeris non maioribus.

§. 17. Hac etiam methodo definire licebit rationem conſtitutionis annorum biſſextilium, quo annorum initia perpetuo in eandem tempeſtatem incidant. Pendet haec determinatio a quantitate anni tropici, quam iuxta accuratiſſimas obſeruationes ponam $365^{d.}\,5^{h.}\,49'\,8''$. Exceſſus ergo ſupra 365 dies erit $5.^{h.}$, $49'\,8''$, qui ſi aequarentur quartae diei parti, tuto ſemper quartus quisque annus biſſextilis conſtitueretur; ſed cum iſte exceſſus minor ſit 6 horis, numerus annorum biſſextilium minor debet accipi; quod cognoſcetur ex ratione 24 *h.* ad 5 *h.* $49'$, $8''$ ſeu ex fractione $\frac{21600}{5237}$, ex qua ſequitur in interuallo 21600 annorum tantum 5237 annos biſſextiles conſtitui oportere. Cum autem haec periodus nimis ſit magna, minores obtinebimus periodos, fractiones minoribus numeris conſtantes inueſtigando, quae proxime fractioni $\frac{21600}{5237}$ ſint aequales. In hunc finem ſequentem diuiſionem inſtituo.

5237	21600	4			
	20948				
	652	5237	8		
		5216			
		21	652	31	
			651		
			1	21	21

Iam ex quotis inuentis 4, 8, 31, 21, qui erunt denominatores fractionis continuae, ſequentes formentur fractiones

$$\begin{array}{ccccc} & 4, & 8, & 31, & 21 \\ \frac{1}{0}, & \frac{4}{1}, & \frac{33}{8}, & \frac{1027}{249}, & \frac{21600}{5237}. \end{array}$$

Ha-

Harum fractionum ſecunda $\frac{4}{1}$ ſtatim dat rationem calendarii Iuliani, quo quartus quisque annus ponitur bisſextilis. Propius ergo ſcopus attingeretur, ſi annis 33 tantum 8 anni bisſextiles collocarentur; ex fractione tertia. Cum autem expediat pro annorum periodo numerum pariter parem habere, ſumamus fractiones minus principales quartae respondentes, quae habeant numeratores per 4 diuiſibiles; quae erunt.

$$\frac{136}{33};\ \frac{268}{65};\ \frac{400}{97};\ \frac{532}{129};\ \frac{664}{161};\ \text{etc.}$$

quarum tertia $\frac{400}{97}$ ad computum calendarii eſt commodiſſima. Apparet autem ex ea, interuallo annorum 400 tantum 97 annos bisſextiles conſtitui debere; ſeu tres annos hoc interuallo, qui in calendario Iuliano bisſextiles eſſent, in communes eſſe transmutandos; id quod etiam Conſtitutio Gregoriana praecipit. Ex quo intelligitur minore annorum interuallo accuratiorem correctionem adhiberi non poſſe. Accuratiſſime autem cum ſole calendarium conciliabitur, ſi interuallo 21600 annorum denuo vnus annus, qui ſecundum conſtitutionem Gregorianam bisſextilis eſſe deberet, in communem transmutetur.

§. 18. Quaeramus iam fractiones, quae ad $\sqrt{2}$ tam prope accedant, vt aliae minoribus numeris conſtantes propius accedere nequeant. Eſt vero $\sqrt{2} = 1,41421356 = \frac{141421356}{100000000}$, quae fractio, ſi diuiſione continua iuxta modum praeſcriptum tractetur, dabit hos quotos, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, etc. ex quibus ſequentes formabuntur fractiones quaeſito ſatisfacientes, tam principales quam minus principales

1,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2
$\frac{1}{0}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{7}{5}$,	$\frac{17}{12}$,	$\frac{41}{29}$,	$\frac{99}{70}$,	$\frac{239}{169}$
		$\frac{2}{1}$;	$\frac{4}{3}$;	$\frac{10}{7}$;	$\frac{24}{17}$;	$\frac{58}{41}$;	$\frac{140}{99}$
√	Λ	√	Λ	√	Λ	√	Λ

quarum fractionum alternae ſigno √ notatae maiores ſunt quam $\sqrt{2}$, reliquae vero ſignum Λ habentes minores quam $\sqrt{2}$.

§ 19. Notatu digna eſt haec proprietas ipſius $\sqrt{2}$, quod omnes quotos praeter primum habeat aequales binario, ita vt ſit

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo vero etiam ſi $\sqrt{3}$ euoluatur, reperiuntur quoti 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1 etc. ita vt ſit

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

Quamuis

Quamuis enim non conſtet ex ipſa diuiſione, vtrum quoti hac lege vlterius progrediantur, tamen id non ſolum probabile videtur, ſed etiam ſequenti modo demonſtrari poteſt, quo valores huiusmodi fractionum continuarum, in quibus denominatores vel ſunt omnes aequales vel alterni vel terni etc. a poſteriori inueſtigare docebimus.

§. 19. Sit igitur propoſita ſequens fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}} \quad \text{quae ponatur} = x$$

erit

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{b + x - a}$$

hinc erit

$$x^2 - 2ax + bx + a^2 - ab = 1$$

atque

$$x = a - \tfrac{b}{2} + \sqrt{(1 + \tfrac{bb}{4})}.$$

Quare ſi fuerit $b = 2$ et $a = 1$, erit

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}} = \sqrt{2}$$

ſi ergo ponatur $b = 2a$ erit

$$\sqrt{(a^2+1)} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a \text{ etc.}}}}}$$

vnde ex omnibus numeris, qui vnitate quadratum excedunt expedite per approximationem radix quadrata extrahi poteſt; vti poſito $a = 2$ ſequentes fractiones ad $\sqrt{5}$ proxime inueniendam inſeruient.

2,	4,	4,	4,	4,	4,	4	
$\frac{1}{0}$;	$\frac{2}{1}$;	$\frac{9}{4}$;	$\frac{38}{17}$;	$\frac{161}{72}$;	$\frac{682}{305}$;	$\frac{2889}{1292}$;	etc.
	$\frac{1}{1}$;	$\frac{7}{3}$;	$\frac{29}{13}$;	$\frac{123}{55}$;	$\frac{521}{233}$;	$\frac{2207}{987}$	
	;	$\frac{5}{2}$;	$\frac{20}{9}$;	$\frac{85}{38}$;	$\frac{360}{161}$;	$\frac{1525}{682}$;	
	;	$\frac{3}{1}$;	$\frac{11}{5}$;	$\frac{47}{21}$;	$\frac{199}{89}$;	$\frac{843}{377}$;	

§. 20. Sit nunc propoſita ſequens fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}}$$

quae

quae ponatur $= x$ atque valor ipſius x reperietur ſequente modo

$$x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b\ \text{etc.}}}}}}=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x-a}}$$

hinc ergo erit $x-a=\frac{x+c-a}{bx+bc-ab+1}$, ſeu

$$bxx+bcx-2abx=abc-a^2b+c.$$

Si ergo fuerit $c=2a$ erit

$$bxx=aab+2a \text{ atque } x=\sqrt{\left(a^2+\tfrac{2a}{b}\right)}$$

ſimili modo ſi ponatur

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ \text{etc.}}}}}}}$$

erit $x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+x-a}}}$

vnde

vnde ſequitur

$$(bc+1)x^2+(bcd+b+d-c-2abc-2a)x-abcd+a^2bc-ab$$
$$-ad+aa-cd+ac-1=0.$$

Atque hoc modo omnes huiusmodi fractiones continuas, quarum denominatores vel omnes vel alterni vel terni vel quaterni etc. ſunt inter ſe aequales, ſummare licet. Semper autem ſumma ſeu valor x eſt radix ex aequatione quadrata.

§. 21. Antequam ad alias fractiones continuas, in quibus denominatores progreſſiones arithmeticas conſtituunt, ſummandas progrediamur; quantitates quasdam tranſcendentes euoluamus, quae in fractiones continuas conuerſae dent denominatores in progreſſione arithmetica progredientes, quo ex his via euadat planior eiusmodi fractiones continuas ſummandi. Hoc igitur logarithmis aliisque expreſſionibus transcendentibus tentans deprehendi in eiusmodi fractiones continuas deduci, ſi numerus cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, eiusque poteſtates quaeque conſiderentur. Poſito igitur hoc numero $=e$, erit $e ==$ 2, 718281828459O4, qua expreſſione in fractionem continuam conuerſa erit

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1\ \text{etc.}}}}}}}}}}$$

cuius

cuius denominatores terni conſtituunt progreſſionem arithmeticam 2, 4, 6, 8 etc. reliqui ſunt vnitates. Quae lex etſi ex ſola obſeruatione eſt deprehenſa, tamen probabile videtur eam in infinitum valere, quod quidem infra certo confirmabitur. Simili modo ſi $\sqrt{e} = 1,6487212707$ in fractionem continuam conuertatur erit

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13}}}}}}}}}} \text{ etc.}$$

cuius progreſſionis lex ſimilis eſt praecedentis. Similiaque obſeruare licet in aliis fractionibus continuis, in quas poteſtates ipſius e transmutantur.

§. 22. Simili modo conſideraui radicem cubicam ex numero e cuius logarithmus hyperbolicus eſt 1, inuenique

$$\frac{\sqrt[3]{e} - 1}{2} = 0,1978062125 = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{30 + \cfrac{1}{42 + \cfrac{1}{54 + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}$$

in cuius fractionis continuae denominatoribus praeter primum progreſſio arithmetica obſeruatur. Simile accidit, ſi poteſtates exponentium integrorum ipſius e conſiderentur et in fractiones continuas transformentur. Sic conſiderans quadratum reperi

$$\frac{e^2-1}{2} = 3,1945280495 1 =$$

$$3 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \text{ etc.}$$

Deinde etiam ex ipſo numero e, ex quo formata fractio continua interruptam habuit progreſſionem arithmeticam denominatorum, obſeruaui paucis mutandis huiusmodi fractionem continuam ab interruptione liberam formari poſſe. Prodiit enim

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{etc.}}}}}}}$$

in qua regularis ineſt progreſſio arithmetica differentia 4 progrediens

§. 23.

§. 23. Cum igitur obſeruaſſem tantam conuenientiam inter fractiones continuas, in quibus denominatores modo interruptam modo non interruptam conſtituant progreſſionem Arithmeticum; in eam incidi cogitationem, num forte fractio continua, in qua interrupta ſit denominatorum progreſſio, in aliam non interruptam transformari poſſit. Conſideraui igitur progreſſionem quamcunque a, b, c, d, e, etc. interque binos contiguos vbique hos duos numeros m, n interpolaui, vt prodiret ſequens fractio continua

$$a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{d\ \text{etc.}}}}}}}}}}$$

hancque inueni aequalem ſequenti fractioni continuae, in qua denominatores ſine interruptione progrediantur.

$$\frac{1}{mn+1}\left((mn+1)a+n+\cfrac{1}{(mn+1)b+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)c+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)d+m+n+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}\right)$$

Demonſtratio huius conuenientiae in hoc conſiſtit, quod fractiones ordinariae, quibus ad valorem vtriusque acceditur, inter ſe conueniant: prout tentanti patebit.

§. 24. Si quantitates interpolatae m, n inuertantur ordine, fractio continua poſterior diſcrimen tantum in primo termino patietur ex quo ſequens ſatis elegans theorema conficitur, quo erit

$$a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}} - \left(a+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}}\right) = \frac{n-m}{mn+1}$$

Quicunque ergo numeri loco a, b, c, d, etc. ſubſtituantur differentia inter duas fractiones continuas ſemper erit cognita atque conſtans ſcilicet $= \frac{n-m}{mn+1}$.

§. 25. Ex eadem inuenta aequalitate inter fractiones continuas ſuperiores, interruptam ſcilicet et non interruptam, ſequens conſequitur aequalitas diuidendo vnitatem per vtramque et addendo vtrinque eandem quantitatem A

A + 1

$$A+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{c\text{ etc.}}}}}}}} = A+\cfrac{mn+1}{(mn+1)a+n+\cfrac{1}{(mn+1)b+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)c+m+n\text{ etc.}}}}$$

Huius ergo aequationis ope quamuis fractionem continuam, interruptam habentem progreſſionem denominatorum binis quantitatibus m et n conuertere licebit in aliam, in qua denominatores ſine interruptione progrediantur. Si ergo vt in fractionibus ſuperioribus habuimus ponatur $m = n = 1$, ſequens prodibit aequatio

$$A+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1\text{ etc.}}}}}}} = A+\cfrac{2}{2a+1+\cfrac{1}{2b+2+\cfrac{1}{2c+2+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

Cum igitur ex §. 21. ſit

$$\frac{1}{e-2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4\text{ etc.}}}}}$$

erit

erit ponendo $A = 1$, $a = 2$, $b = 4$, vt ſequitur

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 \text{ etc.}}}}}}$$

hincque erit vnitatem per vtrumque diuidendo

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{ etc.}}}}}}}}$$

Simili modo ex eodem paragrapho reperietur

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 \text{ etc.}}}}}}}} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{28 \text{ etc.}}}}}$$

Haeque

Haeque fractiones continuae nunc inuentae tantopere conuergunt, vt facili negotio valores ipſorum e et $\mathcal{V}e$ quantumuis prope reperiri queant.

§. 26. Viciſſim vero etiam hinc fractio continua in qua denominatores ordine non interrupto progrediuntur, transmutari poterit in aliam, in qua denominatores interrupti ſint duobus conſtantibus numeris m et n: ita inueni fore

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e\text{ etc.}}}}}=a-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{b-m-n}{mn+1}+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{c-m-n}{mn+1}+\cfrac{1}{m\text{ etc.}}}}}}}}$$

Vel tollendo fractiones in his denominatoribus, ſi opus viſum fuerit, erit

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\text{ etc.}}}}=a-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{mn+1}{b-m-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{mn+1}{c-m-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n\text{ etc.}}}}}}}}}$$

ſi

ſi ergo ponatur $m = n = 1$, habebitur

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d \text{ etc.}}}} = a - 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}b - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}c - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}d - 1 + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

§. 27. Quemadmodum hic fractiones continuas, quarum denominatores ita interrupto ordine progrediuntur, vt inter binos quosque contiguos duae interpoſitae ſint quantitates conſtantes, conſiderauimus, ita eadem reductio extendi poteſt ad quatuor vel ſex vel octo etc. quantitates conſtantes interpolatas. Numerus autem impar quantitatum conſtantum interpolari nequit. Sic ſi inter quantitatum a, b, c, d, etc. binas quasque contiguas interpolentur hae quatuor m, n, p, q, ponaturque breuitatis gratia $mnpq + mn + mq + pq + 1 = P$; et $mnp + npq + m + n + p + q = Q$ erit

$$a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m \text{ etc.}}}}}}} = \frac{1}{P}\left(Pa + npq + n + q + \cfrac{1}{Pb + Q + \cfrac{1}{Pc + Q + \cfrac{1}{Pd + Q + \text{etc.}}}}\right.$$

Atque

Atque ſi fuerit $m=n=p=q=1$, habebitur

$$a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1\text{ etc.}}}}}}}} = \frac{1}{5}\left(5a+3+\cfrac{1}{5b+6+\cfrac{1}{5c+6+\cfrac{1}{5d+6+\text{etc.}}}}\right)$$

Ex quibus noua fractionum continuarum conuerſio naſcitur.

§. 28. Cum autem in praecedentibus, vbi numerum e cuius logarithmus eſt $=1$, eiusque poteſtates in fractiones continuas conuerti, progreſſionem arithmeticam denominatorum tantum obſeruauerim, neque praeter probabilitatem de huius progreſſionis continuatione in infinitum quicquam affirmare valuerim; in id potiſſimum incubui, vt in huius progreſſionis neceſſitatem inquirerem, eamque firmiter demonſtrarem. Hocque etiam feliciter ſum conſecutus ex peculiari modo, quo integrationem huius aequationis $a\,dy+y^2\,dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}}\,dx$ reduxi ad integrationem huius $a\,dq+q^2\,dp = dp$ Poſito enim $p=(2n+1)\,x^{\frac{1}{2n+1}}$ inueni eſſe

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\frac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}} y}}}}}}$$

Vnde cum q per p dari queat, ſitque $p = (2n+1) x^{\frac{1}{2n+1}}$, formari poteſt aequatio finita inter x et y, quae integralis erit aequationis $a\,dy + y^2 dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}} dx$, quoties n eſt numerus integer affirmatiuus.

§. 29. Si ergo n ponatur numerus infinitus expreſſio inuenta erit fractio continua in infinitum excurrens, cuius denominatores conſtituent progreſſionem arithmeticam. Quamobrem habebitur ſequens aequatio

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\frac{9a}{p} + \text{etc.}}}}}$$

atque

atque q ſeu valor huius fractionis continuae ex iſta aequatione $a\,dq + q^2 dp = dp$ definietur. Erit vero $\frac{a\,dq}{1-qq} = dp$ atque $\frac{a}{2} l \frac{1+q}{1-q} = p + C$. quae conſtans ex eo debet determinari, quod poſito $p = 0$ fiat $q = \infty$. Quamobrem erit

$\frac{a}{2} l \frac{q+1}{q-1} = p$, atque $\frac{q+1}{q-1} = e^{\frac{2p}{a}}$ vnde fiet $q = \dfrac{e^{\frac{2p}{a}} + 1}{e^{\frac{2p}{a}} - 1}$,

qui eſt valor fractionis continuae inuentae. Deinde vero cum ſit $e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \frac{2}{q-1}$ habebitur

$$e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \cfrac{2}{\frac{a-p}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \text{etc.}}}}}$$

§. 30. Si ponatur $\frac{a}{2p} = s$, ſeu $a = 2ps$ erit

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \cfrac{2}{2s - 1 + \cfrac{1}{6s + \cfrac{1}{10s + \cfrac{1}{14s + \text{etc.}}}}}$$

Atque ex priore inuenta aequatione erit

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1}=2s+\cfrac{1}{6s+\cfrac{1}{10s+\cfrac{1}{14s+\cfrac{1}{18s+\text{etc.}}}}}$$

Si denominatores huius interpolentur binis vnitatibus habebitur

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1}=2s-1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5s-1+\cfrac{1}{1\ \text{etc.}}}}}}}}$$

Ex qua oritur ſequens fractio continua

$$e^{\frac{1}{s}}=1+\cfrac{1}{s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5s-1+\cfrac{1}{1\ \text{etc.}}}}}}}}}$$

Ex his vero formulis fluunt omnes ſupra inuentae, quibus poteſtates quasdam ipſius e per fractiones continuas expreſſimus, ex quo neceſſitas progreſſionis ante tantum obſeruatae intelligitur.

§. 31. Iam ergo nacti ſumus fractionem continuam, cuius denominatores progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuiusque valorem exhibere licuit. Cum autem haec progreſſio ſit ſpecies tantum arithmeticae, generalem contemplatus ſum progreſſionem arithmeticam atque fractionem continuam, cuius denominatores eam progreſſionem conſtituant, ſequenti modo ad ſummam reuocaui. Sit ſcilicet ſequens fractio continua, cuius valorem, quem quaero, pono $= s$, ita vt ſit

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a + \cfrac{1}{(1+2n)a + \cfrac{1}{(1+3n)a + \cfrac{1}{(1+4n)a + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

ex qua quo valorem ipſius s eruam ab approximatione ad eum ordior. Erit itaque per methodum ſupra traditam

$$\begin{array}{cccc} a, & (1+n)a, & (1+n)2a, & (1+3n)a \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{(1+n)a^2+1}{(1+n)a}; & \frac{(1+n)(1+2n)a^3+(2+2n)a}{(1+n)(1+2n)a^2+1} \end{array}$$

quae fractiones continuo magis ad valorem verum ipſius s accedunt; atque fractio infiniteſima verum ipſius s valorem dabit.

§. 32. Si hae fractiones vlterius continuentur facile obſeruabitur lex, qua formatae ſunt; ex eaque concludetur fractionem infiniteſimam poſt numeratoris et denominatoris diuiſionem per primum denominatoris terminum fore

$$\frac{a + \frac{1}{1 \cdot na} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)n^2a^3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(1+n)(1+2n)n^3a^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{1(1+n)na^2} + \frac{1}{1 \cdot 2(1+n)(1+2n)n^2a^4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6} + \text{etc.}}$$

cui adeo s aequatur. Poſito ergo $a = \frac{1}{\sqrt{nz}}$ erit $s = \frac{1}{\sqrt{nz}} \cdot$

$$\frac{1 + \frac{z}{1 \cdot 1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(1+n)(1+2n)} + \text{etc.}}{1 + \frac{z}{1(1+n)} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)(1+2n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)} + \text{etc.}}$$

qui valor quo obtineatur, ponatur

$$t = 1 + \frac{z}{1 \cdot 1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(1+n)(1+2n)} + \text{etc.}$$

et $$u = 1 + \frac{z}{1(1+n)} + \frac{z^2}{1 \cdot 2(1+n)(1+2n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)} + \text{etc.}$$

ita vt futurum ſit $s = \frac{t}{u\sqrt{nz}}$. Ex inſpectione autem harum duarum ſerierum intelligitur fore $dt = udz$; atque ſimili modo deprehendetur eſſe $udz + ndu = tdz$. Ponatur $t = vu$, quo ſit $s = \frac{v}{\sqrt{nz}}$, erit $vdu + udv = udz$; atque $udz + nzdu = uvdz$; ex quibus ſequitur $\frac{du}{u} = \frac{dz - dv}{v} = \frac{vdz - dz}{nz}$, hincque ſequens aequatio inter z et v tantum conſiſtens $nzdv - vdz + v^2dz = nzdz$; quae ſubſtituto $v = z^{\frac{1}{n}}q$ et $z = r^n$, abibit in hanc

$$dq + q^2dr = nr^{n-2}dr.$$

Ex

Ex qua aequatione, ſi q determinetur per r ponaturque $r = n^{\frac{-1}{n}} a^{\frac{-2}{2}}$, erit valor quaeſitus $s = arq$.

§. 33. Aſſignatio ergo valoris fractionis continuae propoſitae, quem poſui s, exiſtente

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a + \cfrac{1}{(1+2n)a + \cfrac{1}{(1+3n)a + \cfrac{1}{(1+4n)a \text{ etc.}}}}}$$

perducta eſt ad reſolutionem huius aequationis $dq + q^2 dr = nr^{n-2} dr$; ita autem huius aequationis integrale accipi debet, vt facto $a = \infty$ fiat $s = \infty$, vel poſito $a = 0$ fiat $s = 1$. Vnde ſequens pro introducenda conſtante in integrando regula naſcitur, vt caſu quo non eſt $n > 2$ fiat $q = \infty$ poſito $r = \infty$. Ponimus autem n eſſe numerum affirmatiuum, quo fractio continua oriatur, qualem hactenus conſiderauimus denominatores affirmatiuos habentem.

§. 34. Conſtat autem aequationem inuentam $dq + qqdr = nr^{n-2} dr$ congruere cum aequatione olim a *Com. Riccati* propoſita; iisque propterea tantum caſibus eſſe integrabilem, quibus n eſt numerus huius formae $\frac{2}{2m+1}$ denotante m integrum, eumque affirmatiuum, quo pro n obtineamus numeros affirmatiuos. Ob hos igitur caſus ſequentis fractionis continuae

$a +$

$$a + \cfrac{1}{\frac{(2m+3)a}{2m+1} + \cfrac{1}{\frac{(2m+5)a}{2m+1} + \cfrac{1}{\frac{(2m+7)a}{2m+1} + \text{etc.}}}}$$

valor ſemper per expreſſionem finitam exhiberi poterit. Quod quidem per ſe facile conſtat, nam facto $m = 0$, habemus hanc fractionem continuam

$$a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + \cfrac{1}{9a + \text{etc.}}}}}$$

cuius valorem iam ſupra inuenimus. Ad hanc vero reduci poteſt illa generalis poſito enim $a = (2m+1)b$ habebitur

$$(2m+1)b + \cfrac{1}{(2m+3)b + \cfrac{1}{(2m+5)b + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}$$

quae in iſta iam cognita toties continetur, quoties m fuerit numerus integer affirmatiuus.

§. 35. Apparet igitur per hanc ipſam fractionum continuarum reſolutionem integrationem aequationis $dq + q^2 dr = n r^{n-2} dr$ deduci ad integrationem huius aequationis $dq + q^2 dr = 2 dr$, ſiquidem n fuerit $= \frac{2}{2m+1}$ denotante

tante m numerum integrum affirmatiuum. Quam ipſam reductionem iam ſupra §. 28 eodem modo, quo ex hoc fonte perfici poteſt, expoſui. Quo autem intelligatur, quomodo hac ratione verus huiusmodi fractionum continuarum valor reperiatur, conſiderabo caſum $n = 2$ ſeu $m = 0$, quo orietur

$$s = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

Reperietur vero s ex hac aequatione $dq + q^2 dr = 2dr$, quae debito modo integrata dat $r = \frac{1}{2\sqrt{2}} l \frac{q + \sqrt{2}}{q - \sqrt{2}}$ ex qua prodibit $q = \frac{(e^{2r\sqrt{2}} + 1)\sqrt{2}}{e^{2r\sqrt{2}} - 1}$. Eſt vero $r = \frac{1}{a\sqrt{2}}$ atque $s = arq = \frac{q}{\sqrt{2}}$, vnde proueniet valor ipſius $s = \frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1}$, prorſus vt iam ſupra inuenimus (§. 28.).

DE
MAXIMIS
IN
FIGVRIS RECTILINEIS.

AVCTORE
Frid. Moula.

Tabb. V. et VI.

MIrum non immerito videri poteſt, cum figuras rectilineas nemo Geometrarum inſalutatas praeterire poſſit, earum tamen areas ab analyſi infinitorum hucusque intactas remanſiſſe, neque circa eas quaeſtiones de *Maximis* habitas fuiſſe. Num minus intereſt, minusue ſaltem iuuat nouas illis proprietates aſſignare quam aliis bene multis curuis quarum infrequentior eſt vſus? Quapropter non iniucundum iis fore exiſtimaui quibus nihil niſi arduae ſit indaginis nodisque difficilibus refertum non ſapit, ſi Maximorum inueniendorum methodo ad Figuras rectilineas applicata, maximas earum areas inueſtigarem, determinaremque. Hoc conſilio a triangulis figurarum ſimpliciſſimis ordiar, deinde ad Quadrilatera progrediar et poſtremo Poligona attingam, perluſtraturus vbique omnes qui poſſunt occurrere caſus. Ante omnia autem expedire arbitror, initium a duorum lemmatum demonſtratione eſſe faciendum, quorum vtroque ſuperſtruuntur ſolutiones, cum nondum forte cuique ſatis conſtent.

Lemma

Lemma I.

Area Trianguli ABC *aequatur dimidio Rectangulo ex duobus quibusuis Lateribus* AB, AC *v. gr. in ſinum anguli intercepti* A *ducto (poſito ſinu toto* $=1$)

Demonſtratio.

Sit Triangulum ABC et ducatur v. gr. BD perpendicularis in AC, ſitque ſinus anguli BAC $=x$, area Trianguli ABC aequalis erit facto ex dimidia BD in AC, ſeu $\frac{AC.\ BD}{2}$. Quid autem ſubſtituendum ſit loco BD, reperietur faciendo hanc analogiam, vt AB ad BD; ita ſinus totus, ad ſinum anguli BAC, ſeu AB: BD $=1:x$. Ergo AB. $x=$ BD et proinde area Trianguli, ponendo AB. x pro BD, $=\frac{AC.\ AB.\ x}{2}$. Cum autem ſinus anguli cuiuscunque acuti, poſitiuus ſumtus, poſitiuus quoque maneat, ſi in alteram partem cadat, id eſt ſi angulus fiat obtuſus, ſequitur aream Trianguli ſemper eſſe $= + \frac{AB\ AC x}{2}$. Q. E. D. Fig. 1. et 2.

Lemma II.

In Triangulo quocunque ABC, *quadratum cuiusuis lateris aequale eſt quadratis reliquorum laterum, minus duplo rectangulo eorundem laterum in coſinum anguli intercepti, ſcil. v. gr.* $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.\ AC$ *in coſ.* A (*poſito ſinu toto* $=1$). Figura 1.

Demonſtratio.

Ducta, v. gr. BD normali in AC, vt ſupra, et ſinu anguli BAC vocato x, erit $BC^2 = BD^2 + AC^2 -$

$2AC.AD + AD^2$, ſeu (ſubſtituendo loco BD^2 eius valorem $AB^2 - AD^2$) $= AB^2 + AC^2 - 2AC.AD$. Iam vero AB eſt ad AD vt ſinus totus ad coſinum anguli BAC, vel $AB : AD = 1 : \surd(1 - xx)$, vnde AD inuenitur $= AB\surd(1 - xx)$, quo valore ſubſtituto, erit $BC^2 = AB^2$
Figura 2. $+ AC^2 - 2AC.AB\surd(1-xx)$. Sin autem angulus BAC obtuſus fuerit, reperietur $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC.AD$, ſed hoc caſu pro AD ſubſtituendum erit $-AB\surd(1-xx)$, quia coſinus anguli BAD fit negatiuus reſpectu anguli BAC. Quamobrem quisquis fuerit angulus BAC, ſemper habebitur $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\surd(1-xx)$. Q. E. D.

Nunc vero licet maximarum arearum inueſtigationem in triangulis aggredi. Omnibus autem quaeſtionibus quae circa hanc materiam haberi poſſunt, ſequentium quinque problematum ſolutione ſatisfactum iri puto.

Problema I.

Figura 1. *Datis duobus lateribus* AB, AC, *inuenire tertium* BC, *vt area trianguli fiat maxima.*

Solutio.

Sit $AB = a$, $AC = b$, $BC = y$, ſinusque anguli $BAC = x$. Area trianguli ABC erit, vi prioris Lemmatis $= \frac{AB.AC.\text{ſin.}A}{2} = \frac{abx}{2}$. Cum autem haec area maxima eſſe debeat, erit eius differentiale = nihilo, ſcilicet $\frac{abdx}{2} = 0$ et proinde $dx = 0$. Iam vero poſterius lemma quo conſtat $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC.AB.\text{coſ.}A$ alteram ſuppeditat aequationem, nempe $yy = aa + bb -$

2ab

$2abV(1-xx)$ cuius ſi differentiale ſumatur, prodibit $ydy = \frac{abxdx}{V(1-xx)}$, ſeu $dx = \frac{ydyV(1-xx)}{abx}$. Cum vero inuentum ſit $dx=0$, fiat quoque in aequatione modo inuenta $dx=0$, erit igitur $\frac{ydyV(1-xx)}{abx}=0$ ex qua elicitur $x=1$; BC igitur ſeu y fiet (ponendo 1 pro x in aequatione $yy=aa+bb-2abV(1-xx)) = V(aa+bb)$. Q.E.I.

Corollarium 1.

Ex eo quod ſit $x=1$, ſeu ſinus anguli BAC aequalis ſinui toti, quodque y ſeu BC ſit $=V(aa+bb)$, manifeſtum eſt duo latera data ita diſponi debere, vt conſtituant angulum BAC rectum. Sic enim area trianguli ABC fit maxima.

Corollarium 2.

Ita etiam confirmatur muniendi peritorum praxis, qui in omnibus Polygonis ab Hexagono inſuper, angulum Propugnaculi rectum conſtituunt; nam manentibus iisdem tum faciebus, tum Lateribus vt et altitudine, Propugnaculum maximam adipiſcetur capacitatem ſoliditatemque.

Scholion.

Demonſtrari quoque potuiſſet abſque calculo angulum BAC eſſe debere rectum. Cum enim area Trianguli ABC inuenta $=\frac{abx}{2}$ debeat eſſe *maximum*, huius quantitatis valor, non propter conſtantes a et b quippe quae datae ſunt, ſed propter vnicam variabilem x augeri poteſt. Euadet igitur $\frac{abx}{2}$ maximum, ſi fuerit x infinitum, at nullus datur ſinus infinitus, tum maximus demum fit

cum aequatur radio, ſeu ſinui anguli recti. Proinde vt $\frac{abx}{2}$ ſit maximum, neceſſe eſt, vt x ſit ſinus anguli recti.

Figura 3. Idem etiam ope vulgaris geometriae palam ſit, ſi concipiatur triangulum ABC ſuper baſi, v. gr. AC et alterum latus BA perpendiculare erectum ad parallelas AC et BD. Tum enim primo adſpectu patet, quaquaverſus inclinetur AB, altitudinem trianguli ABC minorem reddi, et conſequenter aream, quae altitudini in dimidiam baſim ductae ſemper aequalis eſt, minorem futuram.

Problema 2.

Figura 1. *Dato latere* BC *et ſumma laterum* AB+AC, *inuenire vtrumque, ita vt triangulum ſit maxime capax.*

Solutio.

Sit BC$=a$, AB+AC$=b$, AB$=y$, proindeque AC$=b-y$. Sitque praeterea ſinus anguli BAC$=x$. Ope prioris lemmatis obtinebitur area trianguli ABC$=\frac{(by-yy)x}{2}$ quae cum maxima ponatur, erit eius differentia aequanda nihilo, quare fiet $(b-y)y\,dx=(2y-b)x\,dy$ et $dx=\frac{(2y-b)x\,dy}{y(b-y)}$. Ope vero poſterioris fit BC², id eſt $aa=bb-2by+2yy-2(by-yy)\sqrt{(1-xx)}$, cuius differentia eſt $dy((2y-b)\sqrt{(1-xx)}+(2y-b)(1-xx))$ $+dx(b-y)xy=0$, quae, ſi ſubſtituatur loco dx, eius valor ſuperius inuentus et per dy diuidatur, mutabitur in hanc $(2y-b)\sqrt{(1-xx)}+(2y-b)=0$. Vnde diuidendo per $\sqrt{(1-xx)}+1$, elicietur $2y-b=0$, ſeu $y=\frac{b}{2}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium.

Manifeſtum eſt ergo, dato vno latere ſummam duorum reliquorum in duas partes aequales eſſe ſecandam, quo triangulum exinde conflatum quam maximae ſit capacitatis.

Scholion.

Haud quoque difficulter apertum ſit, tum aream futuram maximam, cum triangulum fuerit Iſoſceles, ſi pro data ſumma laterum AB, AC, ſupponatur filum eius- Figura 4.
dem longitudinis, cuius ambo extrema punctis B et C lineae datae BC tanquam focis ſint affixa, hocque filo deſcribendam eſſe Ellipſin LAM. Notum eſt enim AN tum maximam fore, nempe dimidium axis coniugati, cum AB facta fuerit AC; at AN eſt altitudo trianguli, quae cum omnium maxima ſit, ducta in dimidiam conſtantem BC, dabit aream maximam.

Problema 5.

Data baſi BC *et angulo* A *inuenire* AB *et* AC, *ita* Figura 1.
vt triangulum fiat maximum.

Solutio.

Sit data BC $= a$ et ſinus anguli BAC $= m$. Sit porro AB $= y$ et AC $= z$. Superioribus inſiſtendo veſtigiis, area trianguli ABC, per prius lemma, fiet $= \frac{myz}{2}$. Ponatur nunc haec area maxima, erit differentiale ipſius $\frac{myz}{2}$ aequale nihilo, ſcilicet $\frac{(ydz + zdy)m}{2} = 0$, proinde $dz = \frac{-zdy}{y}$. Iam ex altero lemmate orietur ae-

quatio,

quatio, in qua differentiata ſubſtituendus erit valor ipſius dz modo inuentus, quo relatio inter latera quaeſita y et z innoteſcat. Habetur autem ſecundum hoc lemma BC^2 ſeu $aa = yy + zz - 2zy\sqrt{(1-mm)}$, et ſumtis differentialibus $zdz + ydy = (ydz + zdy)\sqrt{(1-mm)}$, ſiue $dz(z - y\sqrt{(1-mm)}) = dy(z\sqrt{(1-mm)} - y)$ et poſito $\frac{-zdy}{y}$ loco dz, eruitur tandem $y = z$. Verum ex eo quod y et z ſint inter ſe aequalia; patet vtrumque dari, nam anguli ABC et ACB quos ſubtendunt dantur, ſunt enim $= 180° -$ angulo BAC dato. Q. E. I.

Corollarium.

Sequitur ergo triangulum, cuius latus vnum et angulus eidem lateri oppoſitus dantur, iſoſceles circa angulum A eſſe conſtruendum, ſi maximam complecti debeat aream.

Scholion.

Eodem quo in ſcholio praecedenti vſus ſum modo demonſtrari quoque poteſt, aream tum fore maximam cum latera AB, AC aequalia inter ſe fuerint. Facillimum enim eſt captu, quo magis inaequales fuerint AB et AC, eo minorem fieri aream trianguli. E contra quo inaequalitas laterum minor, eo area maior. Area ergo maxima erit, cum inaequalitas fuerit nulla, ſeu cum triangulum fuerit iſoſceles.

Figura 1.

Problema 4.

Dato Perimetro vna cum angulo A *determinare latera, ita vt triangulum ſit maximum.*

Solutio.

Solutio.

Quamuis ex ſolutione praecedentis problematis apertum fiat latera in hoc caſu circa angulum datum A aequalia eſſe debere, tamen lubet hoc et analytice demonſtrari. Sit igitur perimeter trianguli $= a$, A B $= x$, A C $= y$, proindeque B C $= a - x - y$. Sit porro ſinus anguli B A C $= m$. Area trianguli, vi prioris lemmatis, erit $\frac{mxy}{2}$, qua poſita maxima, $\frac{(ydx + xdy)m}{2}$ differentiale ipſius $\frac{mxy}{2}$ aequale erit nihilo, conſequenter $ydx = -xdy$, et $dx = \frac{-xdy}{y}$. Nunc vero per poſterius lemma, BC^2, ſeu $aa - 2ax - 2ay + 2xy = -2xy\sqrt{(1 - mm)}$, cuius aequationis differentia eſt $xdy + ydx - adx - ady = (-xdy - ydx)\sqrt{(1 - mm)}$, ſeu $dx(y - a + y\sqrt{(1 - mm)})$ $= dy(a - x - x\sqrt{(1 - mm)}$, in qua ſubſtituendo valorem ipſius dx modo inuentum, elicitur $x = y$. Valor autem x et y, exinde quod ſint aequalia, indicatur. Cum enim vnusquisque angulorum in triangulo A B C cognoſcatur, quippe quod ſit Iſosceles, perimeterque detur, cognoſcentur et latera. Si ſinus anguli A C B, v. g. dicatur n, erit x, ſeu A B vel A C $= \frac{an}{m + 2n}$ et B C $= a - 2x = \frac{am}{m + 2n}$. Q. E. I.

Corollarium.

Ex hac ergo ſolutione perſpicuum eſt, ſi triangulum cuius et peripheria et angulus vnus dantur, quaeratur maxime capax, illud ſic eſſe conſtruendum, vt latera circa angulum datum ſint aequalia.

Scholion.

Huius problematis geometrica demonſtratio plane eadem eſt quae praecedentis, vel potius problematis ſecundi. Alterum enim haud abſimile multum alteri, nullumque aliud intereſt discrimen, niſi quod varie limitetur longitudo laterum AB et AC.

Problema 5.

Dato perimetro, determinare latera, quo triangulum fiat maximae capacitatis.

Solutio.

Ex praecedentis problematis ſolutione iam fit manifeſtum hoc in caſu duo latera ad minimum futura aequalia, cum ſuperior demonſtratio pro quolibet angulo valeat; quapropter ſupereſt tantum vt tertium quaeratur latus. Id quidem eodem qui in praecedentibus problematis adhibitus eſt modo, inueniri poteſt; ſed praeſtabit
Figura 5. alia, eaque compendioſiore via aggredi. Sit ergo ſumma laterum $=a$, et latera aequalia, v. gr. AB. AC$=x$, proinde BC$=a-2x$ et quaeratur perpendiculum AD quod erit $=\sqrt{(BA^2-BD^2)}=\frac{\sqrt{(4ax-aa)}}{2}$. Ducatur nunc hoc perpendiculum in dimidiam BC, vt habeatur area trianguli ABC quae maxima poni debet, erit igitur $\frac{\sqrt{(4ax-aa)(a-2x)}}{4}$ *Maximum* et proinde eius differentia $2aadx-6axdx=0$, vnde elicitur $x=\frac{a}{3}$ et per conſequens quoque BC$=\frac{a}{3}$. Q. E. I.

Corol-

Corollarium.

Hinc perſpicere licet lineam ex qua conficiendum eſſet triangulum maximum in tres partes aequales fore ſecandam, ſeu quod eodem recidit, ex omnibus triangulis Iſoperimetris, aequilaterum inuoluere maximam aream.

Scholion.

Cum ex praecedenti problemate inferri poſſet triangulum cuius perimeter datur, quodque maximum eſſe debet, ad minimum duo latera habiturum aequalia, liquido inde apparet omnia latera fore aequalia. Nulla enim ſubeſt cauſa cur potius AB et AC, quam AC et BC, vel AB et BC aequalia cenſeri debeant; cumque eodem iure de quibusuis lateribus idem dici poſſit, ſequitur omnia latera eſſe aequalia.

Hactenus eſt quod de triangulis dici queat. De quadrilateris nunc videndum eſt quo caſu maximam nanciſcantur aream. Nihil in hoc deſiderandum confido, ſolutis ſeptem ſubſequentibus problematis.

DE QVADRILATERIS.

Problema I.

Datis quatuor lineis AB, AC, DC, DB, *determinare Quadrilaterum ex iis formatum quod maximam habeat aream.* Figura 1.

Solutio.

Sit $AB=a$, $AC=b$, $DC=c$, $DB=e$; ſinus anguli $BAC=x$, ſinusque anguli $BDC=y$. Ducatur por-

 ro

ro diagonalis BC, erit area trianguli $BAC = \frac{abx}{2}$; et area triangnli $BDC = \frac{cey}{2}$, per lemma prius. Cum autem vtriusque areae ſumma ſit = areae quadrilateri, fiet $\frac{abx + cey}{2}$ maximum, proinde eius differentiale = erit nihilo, nempe $abdx + cedy = 0$, et $abdx = -cedy$. Porro ex poſteriori lemmate ſuppeditatur ſequens aequatio, $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1 - xx)} = c^2 + e^2 - 2ce \sqrt{(1 - y^2)}$, cuius differentiale eſt $\frac{abxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{ceydy}{\sqrt{(1-yy)}}$, vel (ſubſtituendo $-abdx$ loco $cedy$) $\frac{x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{-y}{\sqrt{(1-yy)}}$. Ex quo intelligi poteſt angulum BAC aequalem eſſe angulo BDP qui deinceps eſt anguli BDC, cum tangens anguli BAC ſit aequalis − tangenti BDC, ſeu tangenti BDP. Seu ſi lubeat aequationem hac induere forma, $x\sqrt{(1 - yy)} + y\sqrt{(1 - xx)} = 0$, ex ea cernere licet ſinum ſummae angulorum BAC et BDC aequalem nihilo ob oculos quoque id aſſertum ponere, nempe angulum BAC aequalem eſſe angulo BDP. Q. E. I.

Corollarium 1.

Cum quadrilatera inſcripta circulo hanc habeant proprietatem, vt anguli oppoſiti duobus rectis aequales ſint, patet quadrilaterum ABDC hac proprietate itidem gaudens circulo debere inſcribi, quo eius area quam maximae ſit capacitatis.

Corollarium 2.

Haud volupe forſan non erit oſtendere quomodo, praecedentis ſolutionis ope, proprietates huiusmodi quaplu-

drilaterorum, reſpectu ad circulum nequaquam habito, deriuari queant; et quidem eo magis quod licet hoc a pluribus tentatum, a nemine tamen adhuc praeſtitum ſit. Duabus haecce quadrilatera potiſſimum inſigniuntur proprietatibus, quarum prior, eaque admodum trita, haec eſt: *Rectangulum Diagonalium aequalis eſt ſummae Rectangulorum laterum oppoſitorum*, ſcilicet $AD . BC = AB . DC + AC . AD$. Figurâ 7. Altera vero, minus quod ſciam, nota, ob eamque rem digna cuius demonſtratio hic ſubiungatur, ſic ſonat: *In quadrilatero quocunque inſcripto, Diagonalis* AD *eſt ad Diagonalem* BC, *vt* $AB . AC + BD . DC$, *ad* $AB . BD + DC . AC$. Vtrumque theorema ſic demonſtratur.

Prioris Theorematis
Demonſtratio.

In ſuperiore problemate inuentum eſt $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1 - xx)} = c^2 + e^2 - 2ce\sqrt{(1 - yy)}$, vbi animaduertendum eſt, loco $-\sqrt{(1 - yy)}$ poni poſſe $+\sqrt{(1 + xx)}$; cum coſinus anguli BAC aequalis ſit coſinui anguli BDC, niſi quod alter reſpectu alterius ſit negatiuus. Demonſtratum eſt enim angulum BAC aequalem eſſe angulo BDP. Itaque facta hac ſubſtitutione, orietur haec aequatio $\frac{BC^2 - c^2 - e^2}{2ce} = \frac{a^2 + b^2 - BC^2}{2ab}$, vnde $(BC^2 - a^2 - b^2)ce = (c^2 + e^2 - BC^2)ab$, ſiue $BC^2 = \frac{(a^2 + b^2)ce + (c^2 + e^2)ab}{ab + ce}$. Iam vero eadem via parique ratiocinio habebitur $\frac{AD^2 - b^2 - c^2}{bc} = \frac{a^2 + e^2 - AD^2}{ae}$, et $AD^2 = \frac{(a^2 + ec)bc + (b^2 + c^2)ae}{ae + bc}$; proinde erit $BC^2 \times AD^2 = \frac{(a^2 + b^2)ce + (c^2 + e^2)ab}{ab + ce}$

 x

$\times\frac{(a^2+e^2)bc+(b^2+c^2)ae}{ae+bc}$; quarum fractionum numeratores reciproce per denominatores diuidendo, prodit $BC^2.AD^2 = (ac+be)^2$, ſiue $BC.AD = ac+be$, ſcilicet rectangulum Diagonalium aequale rectangulo laterum oppoſitorum. Q. E. D.

Poſterioris
Demonſtratio.

Poſterioris Theorematis Demonſtratio ſponte ſe exerit. Cum enim $BC^2 : AD^2 = \frac{(a^2+b^2)ce+ab(c^2+e^2)}{ab+ce} : \frac{(a^2+e^2)bc+ae(b^2+c^2)}{ae+bc}$; ſeu $BC^2 : AD^2 = (ae+bc)^2(ac+be) : (ab+ce)^2(ac+be)$; erit $BC^2 : AD^2 = (ae+bc)^2 : (ab+ce)^2$, ſeu $BC : AD = ae+bc : ab+ce$. Q. E. D.

Figura 8. Iam vero ſi circulum in quo deſcribendum eſt quadrilaterum ABDC determinare lubeat, ducatur ad centrum O, v. gr. BO et demiſſo perpendiculo BE in AD, et FO in BD; lateribus vt ſupra nuncupatis, $AB = a$, $AC = b$, $DC = c$, $BD = e$, radioque poſito $= r$; ob triangula ſimilia BOF et BEA, obtinebitur $BE = \frac{ae}{2r}$, proindeque $AE + DE$ ſeu $AD = \frac{a\sqrt{(4r^2-e^2)}+e^2\sqrt{(4r^2-a^2)}}{2r}$. In priori autem theoremate valor ipſius AD in meris habetur datis, nempe AD erit $= \frac{\sqrt{(ac+be)(ab+ec)}}{\sqrt{(ae+bc)}}$. Cognita vero AD, euoluere iam licet r ex aequatione $AD = \frac{a\sqrt{(4rr-e^2)}+e\sqrt{(4rr-aa)}}{2r}$, ex qua ſublatis ſignis radicalibus,

dicalibus, deuenitur ad hanc: $r^2 = \frac{AD^2 a^2 e^2}{2a^2e^2 + 2AD^2(a^2+e^2) - AD^4 - a^4 - e^4}$ et denique ſubſtitutis valoribus ipſarum AD^2 et AD^4 et diuidendo per $a^2 e^2$ ad iſtam

$$\frac{\sqrt{(ac+be)(ab+ce)(ae+bc)}}{\sqrt{(a+b+c-e)(a+b-c+e)(a-b+c+e)(-a+b+c+e)}} = r,$$

quae dat pro quadrati inſcripti latere $r\sqrt{2}$, vt notum eſt.

Problema 2.

Datis tribus lateribus, AB, AC, CD, *cum angulo* A *vel* C *inuenire quartum latus* BD, *ita vt area fiat maxima.*

Solutio.

Sint $AB = a$, $AC = b$, $CD = c$, $BD = y$, ſin. ang. $A = m$, ſinusque anguli $D = x$. Ducta perinde ac in praedenti Problemate Diagonali BC, fiat quadrilateri area $\frac{abm + cyx}{2}$, conſtans ex areis triangulorum ABC et CDB, ſecundum lemma prius expreſſis, maxima, ita eius differentiale $\frac{cydx + cxdy}{2}$ euadet aequalis nihilo, proindeque $dx = \frac{-xdy}{y}$. In aequatione vero $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1-m^2)} = c^2 + y^2 - 2cy\sqrt{(1-xx)}$ ex poſteriori lemmate orta, eaque differentiata, nempe $ydy - cdy\sqrt{(1-xx)} + \frac{cyxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = 0$, valor ipſius dx mox inuentus ſubſtituendus eſt; quo facto tandem obtinetur $c = y\sqrt{(1-xx)}$. Cum autem Diagonalis BC ſit determinata, propter latera BA, AC et ſinum anguli BAC data, y quoque datur et quidem erit hypothenuſa in triangulo BCD; nam $y : c = 1 : \sqrt{(1-xx)}$. Figura 2.

Si

Si ſinus anguli C aſſumtus fuiſſet datus, haec prodiiſſet aequatio $a = y\sqrt{(1-xx)}$ ($x =$ ſinui anguli B), vnde pari modo perſpicere licet latus BD itidem hypothenuſam eſſe in triangulo ADB (ducta Diagonali AD). Q. E. I.

Scholion.

Ex Solutione Problematis primi de triangulis facile concludere licuiſſet hoc ita fore, quippe quod nihil aliud hic quaeratur niſi tertium latus in triangulo BCD, cuius duo latera dantur. At demonſtratum eſt haec duo latera ſibi inuicem normalia eſſe debere.

Problema 3.

Datis iisdem tribus lateribus, ſed cum angulo B *vel* D, *determinare Quadrangulum maximum.*

Solutio.

Figura 6. Lateribus vt antea nuncupatis, ſit v. gr. ſinus anguli $D = m$ et ſinus anguli $A = x$. Differentiale areae quadrilateri $\frac{abx + cym}{}$ quae maxima ponitur, erit $= 0$, ſcilicet $abdx + cmdy = 0$; vnde $dx = \frac{-cmdy}{ab}$, ſed dx inuenitur $= \frac{dy\sqrt{(1-xx)}(y - c\sqrt{(1-mm)})}{abx}$ per poſterius lemma quo $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1-xx)} = c^2 + y^2 - 2cy\sqrt{(1-m^2)}$. Eſt ergo $\frac{-cmx}{\sqrt{(1-xx)}} = y - c\sqrt{(1-m^2)}$ et vtrinque ſumendo quadrata $\frac{c^2m^2x^2}{1-xx} = y^2 + c^2 - 2cy\sqrt{(1-m^2)} - c^2m^2$, ſeu $\frac{c^2m^2}{1-xx} = y^2 + c^2 - 2cy\sqrt{(1-m^2)}$. Erit quoque per conſequens $\frac{c^2m^2}{1-xx} = BC^2$. Nunc vero ob triplicem ipſius

BC^2 valorem, x et y determinabuntur. Sed praeſtat ipſam BC inueſtigare, cum ſtatim deueniatur ad aequationem cubicam in qua ſecundus terminus deeſt. Cognita vero BC, x et y dantur. Q. E. I.

Si angulus B datus fuiſſet, v. gr. $= n$, prodiiſſet $\frac{an}{\sqrt{(1-xx)}} = AD$ (ſinu anguli C poſito $= x$).

Problema 4.

Datis tribus lateribus AB, AC, CD, *inuenire quartum* BD, *areamque maximam.*

Solutio.

Retentis iisdem laterum denominationibus, area quadrilateri ABCD per prius lemma ſic exprimetur $\frac{(ab+cy)x}{2}$, exiſtente x ſinu anguli BAC, vel BDC: cum per ſolutionem problematis primi de quadrilateris pateat hoc in caſu quadrilaterum, ſi maxime ſit capax, circulo inſcribi poſſe; proindeque angulorum BAC, vel BDC vnum eundemque eſſe ſinum. Vtrique pariter idem erit coſinus, niſi quod alter alterius reſpectu negatiuus ſit. Quare BC^2 erit (per lemma ſecundum) $= a^2 + b^2 + 2ab \sqrt{(1-xx)} = c^2 + y^2 - 2cy\sqrt{(1-xx)}$. Differentiatis his aequationibus, prodit $dy(c(1-xx) - y\sqrt{(1-xx)}) = x\, dx(ab+cy)$; locoque dx ſubſtituto $\frac{-cxdy}{ab+cy}$ ipſius valore deſumto ex aequationis $\frac{(ab+cy)x}{2}$ factae maximae, differentiatione; obtinetur tandem $c = y\sqrt{(1-xx)}$. Ex qua pateſit angulum BCD rectum efficiendum eſſe; cum $c : y = \sqrt{(1-xx)} : 1$. Vt denique y innoteſcat, ex du-

plici aequatione ad BC^2 et ex vltima, emergit iſtaec $\frac{a^2+b^2-c^2-y^2}{2ab+2cy}=\frac{c}{y}$; (vtrobique ſcilicet quaerendo $\sqrt{(1-xx)}$) ſeu $y^3-(a^2+b^2-3c^2)y+2abc=0$, quae reſoluta dat y. Q. E. I.

Corollarium.

Ex dimidia igitur BD deſcribendus eſt circulus ad cuius ſemiperipheriam adaptare licebit latera AB, AC, CD, ita quadrilaterum ABCD maximam complectetur aream.

Problema 5.

Datis duobus lateribus AB, AC, *et ſumma reliquorum* BD+DC, *deſcribere quadrilaterum maximum.*

Solutio.

Sit $AB=a$, $AC=b$, $BD+DC=c$, $BD=y$, DC igitur erit $=c-y$. Hic autem non ſecus ac in problemate ſuperiori inferre licet ex Problemate 1. de Quadrilateris, quadrilaterum de quo agitur inſcriptibile eſſe circulo, et per conſequens ſinum anguli BAC eſſe quoque ſinum anguli BDC et coſinum vnius eſſe alterius coſinum, modo hic negatiue, ſi illic poſitiue aſſumtus fuerit. Quamobrem tantum reſtat vt latera BD, DC determinentur, quod fiet viam hucusque tritam calcando. Ponatur $\frac{(ab+cy-yy)x}{2}=$ area quadrilateri, maxima (quam ſuperius x retinens ſignificationem, eandemque in duobus ſubſequentibus problematis retenturum), erit eius differentiale $(ab+cy-yy)dx+(cx-2yx)dy=0$ et proinde $\frac{xdy(2y-c)}{ab+cy-y^2}=dx$, qui valor ſi ſubſtituatur in differentiali harum aequationum $BC^2=a^2+b^2-2ab\sqrt{(1-xx)}$

$\sqrt{(1-xx)} = 2y^2 + c^2 - 2cy + 2(cy - y^2)\sqrt{(1-xx)}$, ſcilicet in $\frac{abxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = dy(2y - c + (c-2y)\sqrt{(1-xx)} - \frac{(cy-yy)xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, prodit (vtrinque per $\sqrt{(1-xx)}$ multiplicando), $(2y-c)\sqrt{(1-xx)} + c - 2y = 0$, et diuidendo per $\sqrt{(1-xx)} - 1$, reſtat $2y - c = 0$, id eſt $y = \frac{1}{2}c$. Q. E. I.

Scholion.

Hoc pro comperto habere, iam ex problematis ſecundi ſolutione de triangulis licuiſſet. Nulla enim refert quomodocunque diſpoſita fuerint latera AB, AC; ſeu, quod eodem recidit, quantacunque fuerit BC.

Problema 6.

Dato vnico latere AB *cum ſumma reliquorum* AC + CD + BD, *determinare quadrilaterum maximum.*

Solutio.

Sit $AB = a$, ſumma reliquorum laterum $= b$, $AC = y$, $BD = CD$ per ſolutionem praecedentem, $= \frac{b-y}{2}$ fiat, breuitatis gratia $= z$. Area quadrilateri maxima facienda, erit $\frac{(ay+z^2)x}{2}$, ex cuius differentiatione (ſubſtituendo $\frac{-dy}{2}$ loco dz) oritur $dx = \frac{(z-a)xdy}{ay+zz}$. Item $BC^2 = a^2 + y^2 - 2ay\sqrt{(1-xx)} = 2z^2(1 + \sqrt{(1-xx)})$ quae differentiata dat $dy(y - a\sqrt{(1-xx)}) + \frac{ayxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = 2zdz(1 + \sqrt{(1-xx)}) - \frac{z^2xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, vel, vice dz ſcribendo $\frac{-dy}{2}$, ſubſtitutoque valore ipſius dx nuper inuen-

 to;

to; $(y+z)\sqrt{(1-xx)}+(z-a)(1-xx)=(z-a)(-xx)$, ſeu denique $(y+z)\sqrt{(1-xx)}+z-a=0$. In qua aequatione ſi loco $\sqrt{(1-xx)}$ ſubſtituatur $\frac{a^2+y^2-2z^2}{2(ay+zz)}$ deſumtum ex aequationibus ad BC^2 prodibit $y^3+zyy+(2az-2z^2-a^2)y+aaz-2az^2=0$ quae diuiſa per $(y+a)(y-a+2z)$ dat tandem $y-z=0$; ſcilicet $y=z$, ſeu $y=\frac{1}{3}b$. Q. E. I.

Scholion.

Cum nulla ſit ratio cur Triangulum BCD potius quam ADC Iſosceles ponendum ſit, quod tamen fieri debet ex demonſtratis, manifeſtum eſt AC eſſe = BD vel DC, ſeu b in tres partes aequales eſſe ſecandam.

Problema 7.

Data ſumma omnium laterum deſcribere quadrilaterum maximum.

Solutio.

Sit ſumma omnium laterum $=a$, $AB=y$, vnumquodque reliquorum $=z$, quippe quae aequalia, per ſolutionem praecedentem, ſint habenda. Hoc modo area quadrilateri $\frac{yzx+z^2x}{2}$ maxima erit ponenda vt ope differentiationis prodeat valor ipſius dx vel dy in ſubſequentibus aequationibus ſubſtituendus, erit igitur $dx=\frac{(y-z)xdy}{3z(y+z)}$, ſi nempe loco dz ſcribatur $\frac{-dy}{3}$ (eſt enim $y+3z=a$). Porro cum ſit $BC^2=y^2+z^2-2yz\sqrt{(1-xx)}=2z^2+2z^2\sqrt{(1-xx)}$, habetur $dy(y-z\sqrt{(1-xx)})$

$xx))-ydz\sqrt{(1-x^2)}+\frac{zyxdx}{\sqrt{(1-xx)}}=dz(z+2z\sqrt{(1-xx)})$ $-\frac{z^2xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ceu $dy(3y+z)\sqrt{(1-xx)}+dy(y-z)(1-xx)=-3zxdx(y+z)$ et loco dx ſubſtituendo $\frac{(y-z)xdy}{(y+z)3z}$, obtinetur $(3y+z)\sqrt{(1-xx)}+y-z=0$. Nunc autem ſi vice $\sqrt{(1-xx)}$ ponatur $\frac{y-z}{2z}$, et aequatio diuidatur per $3y+3z$, prodit tandem $y-z=0$; ſeu $y=z=\frac{a}{4}$. Q. E. I.

Corollarium.

Ex omnibus ergo quadrilateribus eiusdem perimetri, quadratum maxima gaudet area.

Scholion.

Ex Problemate praecedenti ſine vllo negotio perſpicere licuiſſet lineam *a* in quatuor partes aequales ſecandam eſſe. Quo enim potiori iure AB cuilibet reliquorum laterum aequalis ponenda non eſſet? Cumque hoc de ſingulis lateribus dici queat, ſequitur omnia aequalia eſſe debere.

Abſolutis itaque omnibus quae circa quadrilatera moueri poſſunt quaeſtionibus, ad Polygona cuiusuis generis progrediendum eſt. Quae autem, circa ea, potiſſimum noſſe iuuat, tria ſubſequentia continent Problemata.

DE POLYGONIS

Problema I.

Figura 9. *Datis omnibus Polygoni lateribus inuenire Polygonum capaciſſimum.*

Solutio.

Sit polygonum ABCDEF etc. cuius omnia latera dantur, ponaturque eſſe maximum; hoc pacto quadrilatera, vtpote ADCB, BEDC in quae diuidi poterit, erunt maxima et per problematis 1. de Quadrilateris ſolutionem, inſcribi circulo poterunt. Sed manifeſtum eſt haec quadrilatera in vno eodemque circulo eſſe inſcriptibilia, cum circulus ea in tribus vtrique Quadrilatero communibus punctis, ſcil. B, C, D, tangat. Id autem de ceteris quae pari modo formari poſſunt quadrilateris, dici poteſt. Ergo omnia iſthaec quadrilatera, id eſt totum Polygonum inſcribi debet circulo, quo maxime ſit capax. Q. E. I.

Problema 2.

Dato vnico latere Polygoni cum ſumma reliquorum determinare Polygonum maximum.

Solutio.

Figura 9. Si vnicum latus cum ſumma reliquorum detur, euidens eſt Polygonum etiamnum in circulo eſſe inſcribendum, quo eius area ſit maxima. Iamiam enim, in ſuperiore ſcil. ſolutione, pro quibusuis lateribus, id fieri debere demonſtratum eſt. Aſt ex Problemate 5. de Triangulis, et 7. de Quadrilateris, non minus liquet reliqua latera fore aequalia, ſeu *a* (ſi ſumma reliquorum laterum

rum ſit $=a$) in tot partes aequales quot latera ponuntur, diuidendum eſſe. Ergo Polygonum hoc capaciſſimum erit, ſi circulo inſcriptum fuerit, omniaque latera, praeter datum, aequalia fuerint facta. Q. E. I.

Problema 5.

Data ſumma omnium laterum definire Polygonum maximum.

Solutio.

Ob rationess in duobus praecedentibus Problematis memoratas, haud operoſe inferre licet Polygonum hoc non ſecus ac praecedentia in circulo inſcriptum, maximam nanciſci aream, et inſuper omnia latera habere aequalia. Hoc ergo in caſu Polygonum erit regulare, omnia latera, omnesque angulos aequalia habebit. Q. E. I. Figura 9.

Corollarium 1.

Quaecunque ergo Polygona regularia, inter omnia eiusdem perimetri, maximum ambiunt ſpatium. Sic comprobatur architectorum militarium in munimentorum delineatione vſus. Congruunt hoc pacto facilitas et vtilitas.

Corollarium 2.

Exinde non inelegans, vltro ſeſe quaſi offerens Conſectarium, minime praetermittendum eſt. Cum enim in praecedenti problemate non circumſcriptus ſit laterum numerus, pro quouis laterum numero ſolutio valet, hinc pro Polygono infinito laterum numero conſtante. Sed cum tale Polygonum nihil aliud ſit quam circulus, ſequitur circulum inter omnes figuras Iſoperimetras maxima pollere area: quod quidem paſſim, iam dudumque, minus tamen directe extat demonſtratum.

VA-

VARIAE OBSERVATIONES
CIRCA
SERIES INFINITAS.

AVCTORE
Leonh. Euler.

Obſeruationes, quas hic proferre conſtitui, plerumque circa eiusmodi ſeries verſantur, quae prorſus ſunt diuerſae ab iis, quae etiamnum tractari ſunt ſolitae. Cum enim adhuc nullae aliae ſeries ſint conſideratae, niſi quarum vel terminus generalis eſſet datus, vel lex ſaltem, qua ex datis aliquot terminis ſequentes inuenire liceret; ita hic eiusmodi potiſſimum ſeries ſum contemplaturus, quae neque terminum generalem proprie ſic dictum, neque legem continuationis agnoſcant; ſed quarum natura per alias conditiones determinetur. De huiusmodi ergo ſeriebus eo magis erit mirandum, ſi ſummari poterunt, cum ad methodos ſummandi adhuc cognitas neceſſario vel terminus generalis, vel lex progreſſionis requiratur; quibus deficientibus vix alia via patere videatur, qua ad ſummas cognoſcendas pertingere queamus. Ad has autem obſeruationes me peculiaris ſeries a Cel. *Goldbach* mecum communicata deduxit, cuius ſummationem maxime admirandam *Viri Celeb.* permiſſu hic primo loco ſum demonſtraturus.

Theo-

Theorema I.

Huius ſeriei in infinitum continuatae

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+ \text{etc.}$$

cuius denominatores vnitate aucti dant omnes numeros, qui ſunt poteſtates vel ſecundi vel altioris cuiusuis ordinis numerorum integrorum, cuiusque adeo terminus quisque exprimitur hac formula $\frac{1}{m^n-1}$, *denotantibus* m *et* n *numeros integros vnitate maiores; huius ſeriei autem ſumma eſt* $=1$.

Demonſtratio.

Hoc eſt Theorema a *Celeb. Goldbach* primum mecum communicatum, quod me etiam ad ſequentes propoſitiones manuduxit. Ex inſpectione autem huius ſeriei facile intelligitur, quam irregulariter ea progrediatur, et propterea quisque in his rebus verſatus maxime modum admirabitur, quo *Vir Celeb.* ſummam huius ſingularis ſeriei inuenit; ſequenti vero modo mihi hoc Theorema demonſtrauit. Sit

$$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+ \text{etc.}$$

deinde cum ſit

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+ \text{etc.}$$

erit hanc ſeriem ab illa auferendo

$$x-1=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+ \text{etc.}$$

ex denominatoribus ergo excluſi ſunt omnes poteſtates binarii cum binario ipſo; reliqui vero numeri omnes occurrunt.

Ab hac ſerie porro ſubtrahit hanc

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{243} + \text{etc.}$$

et reſtabit

$$x - 1 - \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \text{etc.}$$

denuoque ſubtrahit

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{125} + \text{etc.}$$

reſtabitque

$$x - 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = 1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{10} + \text{etc.}$$

Atque ſimili modo omnes reliquos terminos ſucceſſiue tollendo reperietur tandem

$$x - 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{9} - \text{etc.} = 1$$

ſeu

$$x - 1 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \text{etc.}$$

cuius progreſſionis denominatores vnitate aucti dant omnes numeros, qui non ſunt poteſtates. Quare ſi iſta ſeries ab initio aſſumta

$$x = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

ſubtrahatur, relinquetur

$$1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{26} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei igitur, in qua denominatores vnitate aucti dant omnes omnino poteſtates numerorum integrorum, ſumma eſt $= 1$. Q. E. I.

Theorema 2.

Huius ſeriei in infinitum continuatae

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{63} + \text{etc.}$$

cuius

cuius denominatores vnitate aucti dant omnes poteſtates pares, ſumma eſt $=l2$; atque huius ſeriei

$$\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{26}+\tfrac{1}{48}+\tfrac{1}{80}+\text{etc.}$$

in infinitum continuatae, cuius denominatores vnitate aucti dant omnes poteſtates impares, ſumma aequalis eſt $1-l2$. Quarum ſerierum prioris terminus quisque eſt $\frac{1}{(2m-2)^n-1}$, poſterioris vero terminus quilibet hac continetur formula $\frac{1}{(2m-1)^n-1}$; retinentibus m et n praecedentes valores.

Demonſtratio.

Conſideretur ſequens ſeries, cuius ſumma ponatur x;

$$x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{14}+\text{etc.}$$

Iam cum ſit

$$1=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}+\text{etc.}$$

ſublata hac ſerie ab illa prodibit ſequens

$$x-1=\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{14}+\tfrac{1}{18}+\text{etc.}$$

a qua ſubtrahatur

$$\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{36}+\tfrac{1}{216}+\text{etc.}$$

erit

$$x-1-\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{14}+\tfrac{1}{18}+\text{etc.}$$

ſimili modo ob

$$\tfrac{1}{9}=\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{100}+\tfrac{1}{1000}+\text{etc.}$$

erit

$$x-1-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{9}=\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{14}+\tfrac{1}{18}+\text{etc.}$$

 Omni-

Omnibus ergo terminis hoc modo ſublatis prodibit

$$x = 1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} + \text{etc.}$$

cuius denominatores conſtituunt ſeriem naturalem numerorum imparium exceptis iis, qui vnitate aucti ſunt poteſtates, vti ex formatione huius ſeriei intelligitur. Cum vero ſit

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

atque

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

erit $x = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \text{etc.} - l2.$

Illo ergo pro x inuento valore ſublato ab iſto, in quo omnes omnino numeri impares occurrunt, reſtabit

$$0 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{35} \text{ etc. } - l2,$$

ſeu iſta

$$l2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{35} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei denominatores ſunt ii numeri impares, qui vnitate aucti dant omnes poteſtates pares. Huius ergo ſeriei ſumma eſt $l2$, prout in propoſitione eſt aſſertum. Q. E. Vnum.

Cum vero praecedens Theorema ſit

$$1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{26} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{35} + \text{etc.}$$

vbi denominatores vnitate aucti dant omnes numeros, qui ſunt poteſtates tam pares quam impares, habebitur illa ſerie ab hac demta

$$1 - l2 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{26} + \tfrac{1}{48} + \text{etc.}$$

cuius denominatores adeo ſunt ii numeri pares, qui vnitate aucti dant omnes poteſtates impares. Q. E. Alterum.

Theo-

Theorema 3.

Poſito π pro peripheria circuli, cuius diameter eſt 1, *erit*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{48} - \frac{1}{80} - \frac{1}{120} - \frac{1}{124} - \frac{1}{168} - \frac{1}{224} + \frac{1}{244} - \frac{1}{288} - \text{etc.}$$

cuius ſeriei denominatores ſunt numeri pariter pares, vnitate vel maiores vel minores quam poteſtates numerorum imparium. Illae autem fractiones, quarum denominatores vnitate excedunt poteſtates, ſignum habent + *reliquae ſignum* − 1.

Demonſtratio.

Cum ſit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

cuius ſeriei eae fractiones, quarum denominatores vnitate deficiunt a numeris pariter paribus, ſignum habent − 1, reliquae ſignum +. Ad illam ſeriem vero addatur haec geometrica

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

a qua ſubtrahatur

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

in qua ſerie nec 3, et 5 nec eorundem poteſtates amplius inſunt, ſimili modo 7 eiusque poteſtates tollentur addendo hanc ſeriem

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{7} - \frac{1}{49} + \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \text{etc.}$$

Pari modo tollendo reliquos terminos, qui non ſunt poteſtates, ſimul enim poteſtates tolluntur, prodibit tandem

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{20} - \frac{1}{20} + \frac{1}{24} - \frac{1}{28} - \text{etc.} = 1$$

ſeu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{48} - \frac{1}{80} - \frac{1}{120} \text{ etc.}$$

ob binos terminos ſeſe plerumque deſtruentes, ita vt ſoli ſuperſint, qui ſolitarii erant: ſolitariae autem erant eae fractiones, quarum denominatores, qui ſemper prodierant pariter pares, vnitate vel aucti vel minuti poteſtates numerorum imparium efficiebant. Signa vero horum terminorum legem ſeruant praeſcriptam. Q. E. D.

Theorema 4.

Denotante π vt ante peripheriam circuli cuius diameter eſt $= 1$, *erit*

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{28} - \frac{1}{124} + \frac{1}{244} + \frac{1}{344} \text{ etc.}$$

cuius ſeriei denominatores omnes ſunt numeri pariter pares vnitate vel maiores vel minores, quam poteſtates numerorum imparium non quadratae; atque illae fractiones quarum denominatores vnitate ſuperant tales poteſtates, ſignum habent $+$; *reliquae quarum denominatores deficiunt ab huiusmodi poteſtatibus non quadratis ſignum habent* $-$.

Demonſtratio.

Per Theorema praecedens tertium inuenimus

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} + \frac{1}{48} - \frac{1}{80} - \frac{1}{120} - \frac{1}{124} \text{ etc.}$$

in qua ſerie primo occurrunt denominatores, qui ab omnibus

bus quadratis imparibus vnitate deficiunt, eaeque fractiones omnes habent ſignum idem —. Cum vero ſit

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\frac{1}{168}+\text{etc.}=\frac{1}{4}$$

habebitur loco harum fractionum omnium ſubſtituendo $\frac{1}{4}$ ſequens forma

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{28}-\frac{1}{124}+\frac{1}{244}+\frac{1}{344}\text{ etc.}$$

ſeu

$$\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{28}-\frac{1}{124}+\frac{1}{244}+\frac{1}{344}\text{ etc.}$$

cuius ſeriei denominatores ſunt numeri pariter pares vel vnitate maiores vel minores quam poteſtates numerorum imparium non quadratae, ob quadratas iam excluſas, atque prout vnitate ſunt vel maiores vel minores, fractiones etiam habent ſignum + vel —. Q. E. D.

Corollarium 1.

Ad ſeriem ergo continuandam omnium numerorum imparium, qui non ſunt poteſtates ſumendae ſunt poteſtates exponentium imparium, eaeque vnitate vel augendae vel minuendae, quo prodeant numeri pariter pares, qui erunt denominatores ſeriei inuentae: ſeruata ſignorum regula.

Corollarium 2.

Cum autem omnis numerus impar vel ſit $4m-1$ vel $4m+1$, poteſtates autem exponentium imparium a $4m-1$ ortorum, ſi vnitate augeantur, illae autem, quae a $4m+1$ oriuntur ſi vnitate minuantur, dent numeros pariter pares; aequabitur $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$ ſeriei terminorum qui omnes in hac forma $\frac{1}{(4m-1)^{2n+1}+1}$ continentur, dem-

ta

ta ſerie terminorum in hac forma $\frac{1}{(4m+1)^{2n+1}-1}$ contentorum; vbi loco m et n omnes numeri integri affirmatiui accipi debent praeter eos, qui vel $4m-1$ vel $4m+1$ faciunt poteſtates.

Corollarium 3.

Aequabitur ergo $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$ aggregato ſequentium ſerierum infinitarum

$$\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3^3+1}+\frac{1}{3^5+1}+\frac{1}{3^7+1}+\frac{1}{3^9+1}+\text{etc.}\\ -\frac{1}{5^3-1}-\frac{1}{5^5-1}-\frac{1}{5^7-1}-\frac{1}{5^9-1}+\text{etc.}\\ +\frac{1}{7^3+1}+\frac{1}{7^5+1}+\frac{1}{7^7+1}+\frac{1}{7^9+1}+\text{etc.}\\ +\frac{1}{11^3+1}+\frac{1}{11^5+1}+\frac{1}{11^7+1}+\frac{1}{11^9+1}+\text{etc.}\\ -\frac{1}{13^3-1}-\frac{1}{13^5-1}-\frac{1}{13^7-1}-\frac{1}{13^9-1}+\text{etc.}\\ +\frac{1}{15^3+1}+\frac{1}{15^5+1}+\frac{1}{15^7+1}+\frac{1}{15^9+1}+\text{etc.}\\ \qquad\qquad\text{etc.}\quad\text{etc.}\end{array}\right.$$

Corollarium 4.

Hac ergo ſerie eousque continuata, donec denominatores fiant maiores quam 100000 habebitur $\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{28}-\frac{1}{124}+\frac{1}{244}+\frac{1}{344}+\frac{1}{1332}+\frac{1}{2188}-\frac{1}{2196}-\frac{1}{3124}+\frac{1}{3376}-\frac{1}{4912}+\frac{1}{6860}-\frac{1}{9260}+\frac{1}{12168}+\frac{1}{16808}+\frac{1}{19684}-\frac{1}{24368}+\frac{1}{29792}-\frac{1}{35936}+\frac{1}{42876}-\frac{1}{50652}+\frac{1}{59320}-\frac{1}{68920}-\frac{1}{78124}+\frac{1}{79508}-\frac{1}{91124}$.

Corollarium 5.

Cum omnes denominatores per 4 diuidi poſſint, erit $\pi=3+\frac{1}{7}-\frac{1}{31}+\frac{1}{61}+\frac{1}{86}+\frac{1}{333}+\frac{1}{547}-\frac{1}{549}-\frac{1}{781}+\frac{1}{844}$ etc.

Quae

Quae ſeries ideo notari meretur, quod eius duo primi termini iam dent Archimedis proportionem peripheriae circuli ad diametrum.

Theorema 5.

Retinente π priorem ſignificationem, erit

$$\frac{\pi}{4}-l2=\underbrace{\frac{1}{26}+\frac{1}{28}}+\underbrace{\frac{1}{242}+\frac{1}{244}}+\underbrace{\frac{1}{342}+\frac{1}{344}}+\text{etc.}$$

cuius ſeriei haec eſt lex, vt numeri medii inter binos denominatores binario differentes, ſcilicet 27, 243, 343, *etc. ſint poteſtates exponentium imparium ortae a numeris imparibus, quae vnitate auctae ſint per* 4 *diuiſibiles ſeu numeri pariter pares.*

Demonſtratio.

Cum per Theorema tertium ſit

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{28}-\frac{1}{48}-\frac{1}{80}\text{ etc.}$$

fractionum ſigno − affectarum denominatores ſunt numeri pariter pares vnitate deficientes a poteſtatibus numerorum imparium; fractionum vero ſigno + affectarum denominatores ſunt quoque pariter pares vnitate ſuperantes poteſtates numerorum imparium; atque praeterea ſit per Theorema ſecundum

$$1-l2=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\text{etc.}$$

cuius ſeriei denominatores deficiunt vnitate ab omnibus potentiis numerorum imparium; haec ſeries complectetur omnes terminos illius ſigno − affectos, et praeterea fractiones denominatores habentes impariter pares vnitate deficientes a poteſtatibus numerorum imparium. Quare

ſi haec ſeries ad illam addatur prodibit

$$\frac{\pi}{4} - l2 = \frac{1}{26} + \frac{1}{28} + \frac{1}{242} + \frac{1}{244} + \frac{1}{342} + \frac{1}{344} + \text{etc.}$$

cuius binae fractiones erunt ita comparatae, vt prioris denominator ſit numerus impariter par, poſterioris binario maior pariter par, mediusque numerus inter binos huiusmodi denominatores ſit poteſtas numeri imparis; quae ergo poteſtas vnitate aucta dare debet numerum pariter parem. Q. E. D.

Corollarium 1.

Quia hae poteſtates numerorum imparium ita ſunt comparatae, vt vnitate auctae fiant per 4 diuiſibiles, erunt eae poteſtates imparium dimenſionum, quae oriuntur a numeris huius formae $4m - 1$, qui ipſi non ſunt poteſtates.

Corollarium 2.

Si ergo omnes ſumantur numeri huius formae $4m - 1$, quae non ſunt poteſtates, eorumque capiantur omnes poteſtates exponentium imparium; hae poteſtates vnitate tam auctae quam minutae dabunt omnes fractionum ſeriei inuentae denominatores.

Corollarium 3.

Si binae fractiones in vnam coaleſcant erit

$$\frac{\pi}{4} = l2 + \frac{2 \cdot 27}{26 \cdot 28} + \frac{2 \cdot 243}{242 \cdot 244} + \frac{2 \cdot 343}{342 \cdot 344} + \text{etc.}$$

Quae ſeries formabitur ſumendis omnibus fractionibus, quae oriuntur ex hac forma $\frac{2(4m-1)^{2n+1}}{(4m-1)^{4n+2}-1}$ ſubſtituendo

loco

loco m et n omnes numeros integros ſucceſſiue praeter eos ipſius m valores, qui reddant $4m-1$ poteſtatem.

Theorema 6.

Seriei huius

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{255}+\frac{1}{624}+ \textit{etc.}$$

cuius denominatores vnitate aucti dant omnia quadrata, quae ſimul ſunt altiores poteſtates; huius inquam ſeriei in infinitum continuatae ſumma eſt $\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{6}$: *denotante* π *peripheriam circuli, cuius diameter* $=1$.

Demonſtratio.

Hoc quoque Theorema a *Cel. Goldbachio*, verum ſine demonſtratione accepi, atque iisdem quibus ante veſtigiis inſiſtens hanc inueni demonſtrationem. Cum ante aliquot annos incidiſſem in huius ſeriei

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}$$

ſummam $=\frac{\pi^2}{6}$, hanc ipſam ſeriem ita ſum contemplatus

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

Iam cum ſit

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{etc.}$$

atque

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\text{etc.}$$

ſimilique modo

$$\frac{1}{24}=\frac{1}{25}+\frac{1}{625}+\text{etc. et } \frac{1}{35}=\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

ſi loco harum ſerierum geometricarum ſubſtituantur ſummae prodibit

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{99}\ \text{etc.}$$

 cu-

cuius ſeriei denominatores vnitate aucti dant omnes numeros quadratos, praeter eos, qui ſimul ſint alius ſpeciei poteſtates. Cum autem ſumendis omnino quadratis vnitate minutis ſit

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \text{etc.}$$

proueniet ab hac ſuperiorem ſeriem ſubtrahendo

$$\frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \text{etc.}$$

qui denominatores vnitate aucti dant omnes numeros quadratos, qui ſimul ſunt alius generis poteſtates. Q.E.D.

Conſtituunt haec ſex theoremata alterum obſeruationum iſtarum partem, quibus ſcilicet ſeries additione ſubtractioneue terminorum ortae ſunt conſideratae. Sequentia vero theoremata circa ſeries, quorum termini in ſe inuicem multiplicantur, verſabuntur; neque minus erunt admirabilia, quam praecedentia, cum in iis pariter lex progreſſionis tantopere ſit irregularis. Discrimen autem in hoc potiſſimum erit poſitum, quod in theorematis praecedentibus progreſſio terminorum ſecuta ſit ſeriem poteſtatum, quae per ſe eſt maxime irregularis; in his autem termini progrediantur ſecundum numeros primos, quorum progreſſio non minus eſt abſtruſa.

Theorema 7.

Factum continuum in infinitum ex his fractionibus $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18}$ *etc. vbi numeratores ſunt omnes numeri primi, denominatores vero vnitate deficiunt a numeratoribus Hoc factum inquam aequale eſt ſummae huius ſeriei*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

eſtque adeo infinitum.

Demon-

Demonſtratio.

Nam ſit

$$x = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$$

erit

$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

qua ſerie ab illa demta reſtat

$$\tfrac{1}{2}x = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.}$$

in qua nulli amplius denominatores pares inſunt. Ab hac denuo auferatur iſta ſeries

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}x = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{21} + \text{etc.}$$

reſtabit

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}x = 1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.}$$

in cuius denominatoribus nec per 2 nec per 3 diuiſibiles reperiuntur. Quo autem etiam numeri per 5 diuiſibiles egrediantur, ſubtrahatur iſta ſeries

$$\tfrac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{5}x = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{35} + \text{etc.}$$

reſtabitque

$$\tfrac{1\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 5}x = 1 + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.}$$

Atque ſimili modo tollendis omnibus terminis tum per 7 tum per 11 etc. omnesque numeros primos diuiſibilibus tandem reperietur

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16\cdot 18\cdot 22\cdot \text{etc.}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot \text{etc.}}\,x = 1.$$

Quare cum ſit

$$x = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$$

erit

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\ \text{etc.}}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16\cdot 18\cdot 22\ \text{etc.}}$$

cuius expreſſionis numeratores conſtituunt progreſſionem numerorum primornm, denominatores vero vnitate ab iis deficiunt. Q. E. D.

Corollarium 1.

Expreſſiones ergo $\frac{2.3.5.7.11.13.\,etc.}{1.2.4.6.10.12.\,etc.}$ valor eſt infinitus, et poſito abſolute infinito $=\infty$, erit iſtius expreſſionis valor $=l\infty$, quod infinitum inter omnes infiniti poteſtates eſt minimum.

Corollarium 2.

Cum vero haec expreſſio $\frac{4.9.16.25.36.49\,etc.}{3.8.15.24.35.48\,etc.}$ finitum habeat valorem ſcilicet 2; ſequitur infinities plures eſſe numeros primos, quam quadratos, in ſerie omnium omnino numerorum.

Corollarium 3.

Verum etiam hinc intelligitur infinities pauciores extare numeros primos, quam numeros integros; haec enim expreſſio $\frac{2.3.4.5.6.7\,etc.}{1.2.3.4.5.6\,etc.}$ abſolute infinitum habet valorem, cum ſimilis a numeris tantum primis ortae valor ſit logarithmus iſtius infiniti.

Theorema 8.

Si ex ſerie numerorum primorum ſequens formetur expreſſio

$$\frac{2^n.\ 3^n.\ 5^n.\ 7^n.\ 11^n.\ etc.}{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1)\ etc.}$$

erit

erit eius valor aequalis ſummae huius ſeriei

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+ \textit{etc.}$$

Demonſtratio.

Sit

$$x=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\text{etc.}$$

erit

$$\frac{1}{2^n}x=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\text{etc.}$$

vnde oritur

$$\frac{(2^n-1)}{2^n}x=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\text{etc.}$$

Porro eſt

$$\frac{(2^n-1)}{2^n}.\ \frac{1}{3^n}x=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{21^n}+\text{etc.}$$

vnde fiet

$$\frac{(2^n-1)(3^n-1)}{2^n.\quad 3^n}x=1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\text{etc.}$$

Similibus ergo operationibus pro ſingulis numeris primis inſtitutis omnes ſeriei termini praeter primum tollentur, reperieturque

$$1=\frac{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1)\text{ etc.}}{2^n\quad 3^n\quad 5^n\quad 7^n\quad 11^n\quad \text{etc.}}x$$

et loco x ſerie reſtituta fit

$$\frac{2^n\quad 3^n\quad 5^n\quad 7^n\quad 11^n\quad \text{etc.}}{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1)\text{ etc.}}=1$$

$$= 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

Q. E. D.

Corollarium 1.

Cum poſito $n = 2$ ſit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt 1, erit

$$\frac{4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot \text{etc.}}{3 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 120 \cdot 168 \cdot \text{etc.}} = \frac{\pi^2}{6},$$

ſeu

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 3 \; 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \text{etc.}}.$$

Corollarium 2.

Cum praeterea poſito $n = 4$ ſit

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{\pi^4}{90}.$$

erit

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 121 \cdot \text{etc.}}{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 48 \cdot 50 \cdot 120 \cdot 122 \cdot \text{etc.}}$$

Hac igitur expreſſione per illam diuiſa prodit

$$\frac{\pi^2}{15} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot \text{etc.}}{5 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 50 \cdot 122 \cdot 170 \cdot \text{etc.}}.$$

Theorema 9.

Si quadrata numerorum primorum imparium omnium reſoluantur in duas partes vnitate a ſe inuicem differentes, harumque partium impares ſumantur pro numeratoribus, pares vero pro denominatoribus ſeriei ex factoribus compoſitae valor huius expreſſionis erit $\frac{5 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 61 \; 85 \cdot 145 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 84 \cdot 144 \cdot \text{etc.}} = \frac{3}{2}$

Demon-

Demonſtratio.

Per theorematis praecedentis Coroll. 1. habemus

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4.\ 9.\ 25.\ 49.\ 121.\ 169.\ 289.\ etc.}{3.\ 8.\ 24.\ 48.\ 120.\ 168.\ 288.\ etc.}$$

At in Coroll. 2. ſequentem elicuimus aequationem

$$\frac{\pi^2}{15} = \frac{4.\ 9.\ 25.\ 49.\ 121.\ 169.\ 289.\ etc.}{5.\ 10.\ 26.\ 50.\ 122.\ 170.\ 290.\ etc.}$$

Quarum expreſſionum ſi illa per hanc diuidatur, π ex calculo egredietur, habebiturque

$$\frac{5}{2} = \frac{5.\ 10.\ 26.\ 50.\ 122.\ 170.\ 290.\ etc.}{3.\ 8.\ 24.\ 48.\ 120.\ 168.\ 288.\ etc.}$$

cuius expreſſionis numeratores ſunt vnitate maiores quam quadrata numerorum primorum, denominatores vero vnitate minores. Si ergo vtrinque per $\frac{5}{3}$ diuidatur ſingulaeque fractiones per 2 deprimantur, habebitur

$$\frac{3}{2} = \frac{5.13.25.61.85.145.\ etc}{4.12.24.60.84.144.\ etc.}$$

vbi numeratores ſunt vnitate maiores quam denominatores reſpondentes, atque quisque numerator cum ſuo denominatore facit quadratum numeri primi imparis, ob ſublatum diuiſione quadratum numeri primi paris 2. Q. E. D.

Theorema 10.

Si π vt hactenus ſignificet peripheriam circuli, cuius diameter eſt $=1$, erit

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{80.224.440.624.728.\ etc.}{81.225.441.625.729\ etc.}$$

cuius expreſſionis denominatores ſunt quadrata numerorum imparium non primorum, numeratores vero vnitate minores.

Demonſtratio.

A *Walliſio* habetur ſequens expreſſio pro π, nempe

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8.\ 24.\ 48.\ 80.\ 120.\ 168.\ etc.}{9.\ 25.\ 49.\ 81.\ 121.\ 169.\ etc.}$$

quae fractiones ex omnibus omnino quadratis imparibus formantur. Per Coroll. 1. vero Theor. 8 erat

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4.\ 9.\ 25.\ 49.\ 121.\ 169.\ etc.}{3.\ 8.\ 24.\ 48.\ 120.\ 168.\ etc.}$$

ſiue

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{9.\ 25.\ 49.\ 121.\ 169.\ 289.\ etc.}{8.\ 24.\ 48.\ 120.\ 168.\ 288\ etc.}$$

quae fractiones ex ſolis numerorum primorum imparium quadratis ſunt formatae. Si iam hae duae expreſſiones in ſe mutuo ducantur prodibit

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{80.\ 224.\ 440.\ 624.\ 728.\ etc.}{81.\ 225.\ 441.\ 625.\ 729.\ etc.}$$

quae ideo fractiones quadrata numerorum imparium non primorum ſequuntur. Q. E. D.

Theorema 11.

Sumto π *pro peripheria circuli, cuius diameter eſt* 1, *erit*

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ 23.\ etc.}{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ 12.\ 16.\ 20.\ 24.\ etc}$$

cuius expreſſionis numeratores conſtituunt progreſſionem numerorum primorum, denominatores vero ſunt numeri pariter pares vnitate vel maiores vel minores quam numeratores reſpondentes.

Demonſtratio.

Cum ſit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\ etc.$$

erit

$$\frac{1}{3}.\ \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + etc.$$

quibus ſeriebus additis fit

$$\frac{4}{3}.\ \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\ etc.$$

Deinde

Deinde eſt

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{35} - \frac{1}{55} + \text{etc.}$$

qua ſublata prodit

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

in qua ſerie nulli amplius occurrunt denominatores vel per 3 vel per 5 diuiſibiles. Simili modo tollentur omnes per 7 diuiſibiles addendo

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{4\cdot4}{5\cdot3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{7} - \frac{1}{49} - \frac{1}{77} \text{ etc.}$$

prodibit autem

$$\frac{8\cdot4\cdot4}{7\cdot5\cdot3}\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \text{ etc.}$$

Perſpicitur autem denominatores per numerum primum huius formae $4n-1$ diuiſibiles tolli additione, vnde iſte nouus factor $\frac{4n}{4n-1}$ accedit: denominatores vero per numerum primum formae $4n+1$ diuiſibiles tolli ſubtractione, vnde nouus factor iſte $\frac{4n}{4n+1}$ adiicietur. Horum ergo factorum ſucceſſiue addendorum donominatores erunt numeri primi; numeratores vero numeri pariter pares vnitate vel maiores vel minores quam denominatores. Hoc ergo modo ſi auferantur omnes termini ſeriei initio aſſumtae, prodibit tandem

$$\frac{\text{etc.}\ 24.\ 20.\ 16.\ 12.\ 12.\ 8.\ 4.\ 4.}{\text{etc.}\ 23.\ 19.\ 17.\ 13.\ 11.\ 7.\ 5.\ 3.}\ \frac{\pi}{4} = 1.$$

Ex qua oritur

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ 23.\ \text{etc.}}{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ 12.\ 16.\ 20.\ 24.\ \text{etc.}} \qquad \text{Q. E. D.}$$

Theorema 12.

Si omnes numeri primi impares in duas partes vnitate a ſe inuicem differentes diuidantur atque partes pares

ſumantur pro numeratoribus, impares vero pro denominatoribus, erit factum continuum

$$\frac{2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ \text{etc.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ \text{etc.}} = 2$$

Demonſtratio.

Cum ſit per Theorema praecedens $\frac{\pi}{4} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ \text{etc.}}{4.\ 4.\ 8.\ \text{etc.}}$ erit

$$\frac{16}{\pi^2} = \frac{4.\ 4.\ 4.\ 4.\ 8.\ 8.\ 12.\ 12.\ 12.\ 12.\ 16.\ 16.\ \text{etc.}}{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 11.\ 11.\ 13.\ 13.\ 17.\ 17\ \text{etc.}}.$$

At ex Coroll. 1. Theor. 8. ſi per $\frac{3}{4}$ multiplicetur habetur

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7\ 11.\ 11.\ 13\ 13.\ \text{etc.}}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 12.\ 14.\ \text{etc.}}$$

quarum expreſſionum vtraque per numeros primos impares formatur. Si ergo hae in ſe inuicem multiplicentur, prioris denominator deſtruet numeratorem poſterioris, atque praeterea tam ex illius numeratore quam huius denominatore medietas terminorum auferetur. Prodibit ſcilicet

$$2 = \frac{4.\ 4\ 8.\ 12.\ 12.\ 16.\ 20.\ 24.\ \text{etc}}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 18.\ 22.\ \text{etc.}}$$

vbi numeratores ſunt numeri pariter pares, denominatores vero impariter pares vtrique vnitate vel maiores vel minores quam numeri primi impares. Si ergo ſingulae fractiones per binarium deprimantur, numerator continebit numeros pares, denominator vero impares, atque bini reſpondentes et vnitate a ſe inuicem different, et coniuncti numerum primum conſtituent. Habebitur igitur

$$2 = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ \text{etc.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ \text{etc.}}$$

Q. E. D.

Theo-

Theorema 13.

Si omnes numeri impares non primi in duas partes diuidantur vnitate a ſe inuicem diſtantes harumque pares pro numeratoribus impares vero pro denominatoribus accipiantur, erit

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ 18.\ 20.\ 22.\ 24.\ etc.}{5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 13.\ 17.\ 17.\ 19.\ 23.\ 25.\ etc.}$$

Demonſtratio.

Cum per *Walliſii* quadraturam circuli ſit

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ 12.\ 12.\ etc.}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ 11.\ 13.\ etc.}$$

cuius expreſſionis ſi ſinguli numeratores ad ſuos reſpondentes denominatores addantur, prodeunt omnes omnino numeri impares. At quoniam ſimilis expreſſio, ſi ex numeris imparibus primis tantum formatur, aequatur binario, vti in praecedente Theoremate eſt demonſtratum, quo erat

$$2 = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ etc.}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ etc.}$$

ſi illa expreſſio per hanc diuidatur, proueniet

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ 18.\ 20.\ 22.\ 24.\ etc.}{5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 13.\ 17.\ 17\ 19.\ 23.\ 25.\ etc.}$$

quae ſimiliter ex numeris imparibus non primis formatur. Numeratores ſcilicet erunt numeri pares, denominatores vero impares vnitate a numeratoribus diſtantes, atque ſinguli numeratores ad ſuos reſpondentes denominatores additi dabunt omnes numeros impares non primos. Q. E. D.

Theorema 14.

Denotante vt hactenus π *circuli peripheriam cuius diameter eſt* 1, *dico fore*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 10.\ 23.\ 29.\ 31.\ etc.}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 18.\ 22.\ 30.\ 30.\ etc.}$$

cuius expreſſionis numeratores conſtituunt ſeriem numerorum primorum imparium, denominatores vero ſunt numeri impariter pares vnitate vel minores vel maiores quam numeratores reſpondentes.

Demonſtratio.

Per Coroll. Theor. 8. ſi per $\frac{3}{4}$ multiplicetur eſt

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 11.\ 11.\ 13.\ 13.\ \text{etc.}}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 12.\ 14.\ \text{etc.}}$$

in qua numeratores ſunt numeri primi impares bis poſiti, denominatores vero numeri tam pariter pares quam impariter pares, vnitate vel maiores vel minores quam ipſi numeri primi. Deinde Theoremate 11. demonſtrauimus eſſe

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ 23.\ \text{etc.}}{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ 12.\ 16.\ 20.\ 24.\ \text{etc.}}$$

in qua expreſſione numeratores ſunt numeri primi impares ſemel poſiti, denominatores vero numeri pariter pares vnitate diſtantes a numeris primis, ita vt haec expreſſio inpraecedente ſit contenta. Quare ſi illa expreſſio per hanc diuidatur prodibit

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ \text{etc.}}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 18.\ \text{etc.}}$$

in qua numeri impares primi numeratores conſtituunt; denominatores vero ſunt numeri impariter pares vnitate vel maiores vel minores quam numeratores. Q. E. D.

Theorema 15.

Denotante π *peripheriam circuli, cuius diameter eſt* 1, *erit*

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} - \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} - \frac{1}{35} - \frac{1}{37} \text{ etc.}$$

cuius ſeriei denominatores ſunt numeri impares omnes, ratio

tio ſignorum autem hoc nititur fundamento. Numeris primus huius formae $4n-1$ datur ſignum $+$; numeris primis autem huius formae $4n+1$ ſignum -1. Deinde numeris compoſitis id tribuitur ſignum, quod ipſis ratione compoſitionis ex primis cum ſuis ſignis ſecundum multiplicationis regulam competit.

Demonſtratio.

Quemadmodum vſitatis hic operationibus haec ſeries

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\text{etc.}$$

conuerſa eſt in hanc expreſſionem $\frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ \text{etc.}}{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ \text{etc.}}$, ita viciſſim methodus poteſt excogitari, qua hanc expreſſionem

$$\frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ \text{etc.}}{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ 12\ \text{etc.}}$$

in ſeriem

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\ \text{etc.}$$

transmutare liceat. Atque ſi haec methodus ad expreſſionem theoremate praecedente inuentam

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3.\ 5.\ 7.\ 11\ 13.\ 17.\ \text{etc.}}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ \text{etc.}}$$

adhibeatur, iſta expreſſio abibit in iſtam ſeriem propoſitam

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\ \text{etc.}$$

cuius propterea ſumma eſt $\frac{\pi}{2}$. Ad idem a poſteriore colligere licet, ponendo

$$x=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\ \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{33}-\text{etc.}$$

atque ſubtrahendo prodibit

$$\frac{2}{3}x=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\ \text{etc.}$$

Deinde

Deinde cum ſimili modo ſit

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}x = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{55} \text{ etc.}$$

prodibit addendo

$$\frac{6.\ 2}{5.\ 3}x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \text{ etc.}$$

Atque ſimiliter omnibus tollendis terminis praeter primum 1 inuenietur

$$x = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ \text{etc.}}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 18.\ \text{etc.}} = \frac{\pi}{2}.$$

Atque hinc ſimul ratio ſignorum ſeriei propoſitae colligitur eadem ipſa, quam deſcripſimus. Q. E. D.

Corollarium.

Summa ergo ſeriei propoſitae

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \text{ etc.}$$

duplo maior eſt quam ſumma huius ſeriei

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

Quare cum ipſae fractiones ſint vtrinque eaedem, ſolis ſignis effectum eſt, vt altera alterius ſit dupla.

Theorema 16.

Poſito π *vt hactenus pro peripheria circuli cuius diameter eſt* 1, *erit*

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} \text{ etc.}$$

Fractionum autem affirmatiuarum denominatores ſunt vnitate minores quam numeri impares non poteſtates; fractionum autem negatiuarum denominatores ſunt vnitate maiores. Cuiusque autem fractionis ſignum congruit cum ſigno numeri imparis vel vnitate maioris vel minoris non poteſtatis in praecedente Theoremate.

Demon-

Demonſtratio.

Haec ipſa ſeries oritur ex conuerſione praecedentis ſecundum modum in Theorematis 1. 2. 3. vſitatis, quo continuo progreſſiones geometricae vel adduntur vel demuntur, quoad ſolus primus terminus ſuperſit. Q.E.D.

Theorema 17.

Si numeris imparibus primis huius formae $4n-1$ *tribuatur ſignum* $+$, *reliquis huius formae* $4n+1$ *ſignum* $-$, *numeris vero compoſitis ea ſigna, quae ipſis per regulas multiplicationis ex primis competunt; erit*

$$\frac{3\pi}{8}=1+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{25}+\frac{1}{33}-\frac{1}{35}-\frac{1}{39}+\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\ \textit{etc.}$$

qui denominatores ſunt facta vel ex duobus vel ex 4 *vel ex* 6 *vel etc. numeris primis.*

Demonſtratio.

Cum enim per Theorem. 15 ſit

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\ \text{etc.}$$

vbi denominatores ſunt omnes numeri impares et ſigna eam tenent legem quam praeſcripſimus; atque praeterea ſit

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\text{etc.}$$

quarum ſerierum ii termini ſigna habent eadem, quorum denominatores ſunt facta vel ex binis vel quaternis, vel ſenis etc. numeris primis. His ergo ſeriebus additis ſoli, iſti termini remanebunt, diuiſioneque facta per 2 erit

$$\frac{3\pi}{8}=1+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{25}+\frac{1}{33}\ \text{etc.}$$

quae eſt ipſa ſeries propoſita, atque ex lege ſignorum ſimul ſequitur, eas fractiones habere ſignum $+$, quarum denominatores in hac forma $4n+1$ continentur; reliquas ſignum $-$. Q. E. D.

Corollarium.

Si ab huius theorematis ſerie ſubtrahatur iſta

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

prodibit

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} \text{ etc.}$$

cuius denominatoris ſunt vel ipſi numeri primi vel facta ex ternis vel quinis vel etc. ii vero qui ſunt formae $4n-1$ ſignum habent $+$ reliqui formae $4n+1$ ſignum $-$.

Theorema 18.

Si omnibus numeris primis tribuatur ſignum $-$, cuique vero numero compoſito id ſignum quod ipſi ſecundum multiplicationis regulas competit, atque ex omnibus numeris ſequens formetur ſeries

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \text{etc.}$$

erit eius ſumma in infinitum continuatae $= 0$.

Demonſtratio.

Sit enim $x =$ ſummae iſtius ſeriei ſeu

$$x = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \text{ etc.}$$

erit per operationes in poſterioribus theorematis adhibitas

$$\frac{3}{2}x = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

atque ſimili modo

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}x = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \text{ etc.}$$

Denique hac operatione infinities repetita erit

$$\frac{3.\ 4.\ 6.\ 8.\ 12.\ 14.\ \text{etc.}}{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ \text{etc.}}\ x = 1.$$

At cum ſit per Theor. ſeptimum

$$\frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.} \text{ etc.} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}\ l\infty:$$

facile intelligitur et noſtrum ipſius x coefficientem eſſe infinite

infinite magnum. Quare quo factum aequale eſſe poſſit 1 erit $x=0$, et hanc ob rem habebitur

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\text{ etc.}$$

cuius denominatores, qui ſunt vel ipſi primi vel facta ex ternis, quinis, etc. habent ſignum − reliqui ſignum +. Q.E.D.

Corollarium 1.

Modus ergo apparet, quo in progreſſione harmonica ſigna in ſingulis terminis ſint diſtribuenda, vt ſumma totius ſeriei fiat $=0$.

Corollarium 2.

Cum inuenerimus $x=0$, erit quoque $\frac{1}{2}x=0$, et hanc ob rem habebimus quoque

$$0=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\text{ etc.}$$

in qua numeri tantum impares occurrunt; deſcriptamque ratione ſignorum tenent legem.

Theorema 19.

Summa ſeriei reciprocae numerorum primorum

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\text{ etc.}$$

eſt infinite magna; infinities tamen minor, quam ſumma ſeriei harmonicae $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ *etc. Atque illius ſumma eſt huius ſummae quaſi logarithmus.*

Demonſtratio.

Ponatur $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{ etc.}=A$ atque $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{ etc.}=B$ et $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\text{ etc.}=C$. atque ita porro omnes poteſtates peculiaribus litteris deſignando; erit poſito e pro numero cuius logarithmus hyperbolicus eſt 1

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{etc.}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\ \text{etc.}$$

Nam eſt

$$A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D\ \text{etc.} = l\,\frac{2}{1}+l\,\frac{3}{2}+l\,\frac{5}{4}+l\,\frac{7}{6}+\ \text{etc.}$$

ideoque

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D} = \frac{2.3.5.7.\,etc.}{1\ 2.4.6.\,etc} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ \text{etc.}$$

per Theor. 7. At non ſolum B, C, D, etc. habebunt valores finitos, ſed etiam $\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+$ etc. valorem habet finitum. Quare quo

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{etc.}}\ \text{ſit} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ \text{etc.} = \infty.$$

oportet vt A ſit infinite magnum, cumque ideo eius reſpectu ſequentes termini $\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+$ etc. euaneſcant, erit

$$e^{A} = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{etc.}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ \text{etc.}$$

Atque conſequenter erit

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\ \text{etc.}$$
$$= l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ \text{etc.}\right)$$

illius ergo ſeriei ſumma erit infinities minor quam huius, atque cum huius ſumma ſit $= l\infty$ erit

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ \text{etc.} = l.\,l\infty.$$

Q. E. D.

DE

DE VARIATIONE MOTVVM A PERCVSSIONE EXCENTRICA.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

§. 1.

Percuſſionem *excentricam* voco, quando linea ducta per punctum impulſus perpendiculariter ad corporis ſuperficiem non tranſit per eiusdem corporis centrum grauitatis. Excentrica itaque eſſe poteſt percuſſio vel ratione vnius tantum corporis vel ratione ſimul vtriusque; et de tali quidem percuſſione nihil adhuc, quantum ſcio, publici iuris factum fuit ab iis, qui de motu corporum a percuſſione egerunt. Nouum itaque argumentum eſt idemque in mechanica, ſi recte iudico, vtiliſſimum: Prius vero, quam illud aggredior, aliqua de motu corporum vniformi monenda eſſe exiſtimo. Tabula VII.

§. 2. In corpore libero duo eſſe poſſunt motus permanentes atque vniformes, nempe *progreſſiuus* et *rotatorius*: progreſſiuus mihi eſt, quo ſingulae corporis partes velocitate communi ac directione parallela in linea recta progrediuntur: rotatorium autem voco, qui fit circa axem per centrum grauitatis tranſeuntem, ratione cuius velocitates diuerſarum partium ſunt diſtantiis ab axe propor-

 tiona-

tionales. Vterque motus in vno eodemque corpore ſimul eſſe atque permanere poteſt, ita vt neuter a neutro afficiatur vllamue patiatur mutationem: tunc vero cum ſimul adeſt vterque in vno corpore, motum inde prouenientem vocabo *mixtum*; aliquando etiam conſiderabimus motum circa alium axem, quam qui transit per centrum grauitatis, huncque motum vocabo *gyratorium*, qui adeoque diſtinguendus erit a motu rotatorio: motus autem gyratorius reipſa non differt a motu mixto pro dato temporis puncto, quandoquidem ſemper motus aſſignari poteſt progreſſiuus aliusque rotatorius, qui ſimul in corpore exiſtentes non differunt per minimum temporis ſpatiolum a motu gyratorio, de quo ſermo eſt.

§. 3. Praemiſſis iſtis definitionibus iam dicemus ſub quibusnam hypotheſibus problema noſtrum tractabimus. Res itaque nobiscum ita erit inſpicienda, quaſi motus corporum fiat ſuper plano horizontali et perfecte laeui, ita vt motus tam progreſſiuus quam rotatorius (cuius quidem axem ponemus conſtanter perpendicularem ad planum iſtud) integri conſeruentur, niſi percuſſionis momento: vel ſi mauis quaſi planum abeſſet ipſaque corpora grauitate eſſent deſtituta ſolaque ipſis inertia inhaereret. Tum etiam ſtatuemus percuſſionem fieri in inſtanti, quamuis hypotheſis iſta minime conueniat cum rigore geometrico, prouti id ex ipſo corporum percuſſorum ſono et ex tempore vibrationis, quod cuiuis ſono conuenire non ita pridem a Geometris fuerit determinatum, facile intelligitur. Denique etiam ponemus illam lineam, quae per punctum impulſus perpendiculariter ducitur ad ſuperficiem

ficiem corporis, eſſe in plano ad axem rotationis perpendiculari et per centrum grauitatis transeunte: ita nempe axis rotationis poſt percuſſionem idem manet, qui fuit ante percuſſionem nec nouus motus rotatorius circa alium axem accedit, quod alias fieret. Ad hosce caſus reſtringemus ſolutionem noſtram, ne nimis fiat intricata, nimisque a colliſione corporum hactenus conſiderata recedat.

§. 4. Licebit ſaluis praefatis hypotheſibus corpora conſiderare tanquam diuiſa in infinita ſtrata ad axem rotationis perpendicularia eaque omnia ſtrata ponere veluti vnita in plano per centrum grauitatis transeunte, ita vt nunc problema noſtrum eo ſit reductum, vt *ſi ſuper plano indefinito duo plana cuiuscunque figurae et vtcunque inaequaliter grauia moueantur tam motu progreſſiuo quam rotatorio*, *atque ſic in ſe inuicem in quocunque puncto impingant*, *determinetur motus vterque in vtroque graui poſt colliſionem futurus.* Solutioni huius problematis inſeruient ſequentes propoſitiones:

Problema.

§. 5. S*i planum fuerit horizontale et vtcunque graue* Fig. 1. et 2.
ABC *mobile circa punctum* D, *ſiue intra planum*, *vti in figura prima*, *ſiue extra planum*, *vti in ſecunda figura ſumtum*; *ſique alicubi veluti in* B *potentia qualiscunque applicata fuerit*, *quae planum iſtud in gyrum agat circa punctum fixum* D, *inuenire maſſam quae plano propoſito ſubſtitui poſſit in* B, *vt accelerationes vtroque modo eadem fiant lege.*

So-

Solutio.

Accipiatur in plano maſſula infinite parua, quam vocabimus m, poſita in puncto quocunque E, dicaturque maſſula ipſi ſubſtituenda in puncto B, μ et concipiatur factam eſſe rotationem minimam, qua B peruenerit in b et E in e; erit (ductis DB, Db, DE, De vna cum minimis Bb et Ee) $Ee = \frac{DE}{DB} \times Bb$, quia ſpatiola B$b$ et Ee eodem tempuſculo deſcripta ſe habent vt DB ad DE: hoc igitur reſpectu poſtulat requiſita actionum aequalitas, vt ſumatur $\mu : m = DE : DB$: Porro vis acceleratrix in E ſe habet ad vim acceleratricem in B vt DB ad DE et hoc altero reſpectu fit rurſus $\mu : m = DE : DB$; vnde vera ratio quaeſitae maſſulae μ ad aſſumtam maſſulam m eſt vt DE^2 ad DB^2: atque ſi omnibus maſſulis planum ABC componentibus aliae ſecundum praefatam legem ſubſtituantur, habebitur tandem maſſa integra in B toti plano ſubſtituenda, vt vtroque modo accelerationes pari fiant lege.

Corollarium.

Si planum propoſitum ABC verticaliter ſuſpendatur ex puncto D atque ſic ſecundum regulas notas centrum oſcillationis quaeratur, dicaturque diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis t, diſtantia centri grauitatis ab eodem puncto ſuſpenſionis r, maſſa totius plani M et diſtantia $DB = a$; dico fore maſſam in B ſubſtituendam $= \frac{rt}{aa} M$.

Scholium.

§. 7. Apparet ex ipſa demonſtratione, vim ſiue potentiam in B applicatam, quae planum in gyrum agit idemque

idemque continue certa lege accelerat, poſſe eſſe aut fingi qualemcunque ſine rei mutatione: ſic itaque nominatim motus plani gyratorius etiam ortus ſupponi poteſt a percuſſione in B facta, quandoquidem percuſſio nihil aliud ſit quam potentia veluti infinita et quaſi infinite parum durans. Igitur ſi planum fixum fuerit in D, ſic tamen vt libere circa iſtud punctum gyrari poſſit, ſique percutiatur in B, planum iſtud non aliam poſt percuſſionem habebit velocitatem, quam ſi eiusdem maſſae ſubſtituta fuerit alia in puncto B concentrata et $=\frac{rt}{as}M$, et in hoc caſu velocitas puncti B poſt percuſſionem (quaecunque fuerit ante percuſſionem) ex legibus ordinariis motuum a percuſſione innoteſcit.

Caeterum poteſt motus iſte gyratorius circa punctum D conſiderari ad temporis punctum, quaſi motus mixtus ex progreſſiuo et ex rotatorio, quos §. 2. definiuimus; ſi enim centrum grauitatis ponamus in M idemque motum velocitate v, licebit ad temporis punctum rem ita intueri, ac ſi motus adeſſet progreſſiuus ſub eadem velocitate v et perpendicularis ad lineam DM aliusque rotatorius, quo punctum D circa centrum grauitatis M velocitate v in directionem contrariam rotaretur: vtroque enim modo ſingula plani puncta, velocitate et directione iisdem primo temporis momento mouentur.

Si porro concipiatur axem, quo punctum D firmatur tolli, tunc vterque praefatus motus, progreſſiuus nempe et rotatorius, conſeruabitur et ita quidem, vt centrum grauitatis M, in directione ad rectam DM perpendiculari, moueri pergat velocitate v, dum quoduis plani punctum

circa centrum grauitatis M rotetur velocitate diſtantiae a centro grauitatis proportionali, atque ſic deſcribat cycloidem ſiue centractam ſiue elongatam: ipſum autem punctum D velocitate v rotatum motu ſuo mixto deſcribet cycloidem ordinariam, cuſpidem in ipſo puncto D habentem.

§. 8. Ponamus iam planum ABC eſſe quieſcens et liberum ſiue nullibi fixum idemque percuti: acquiret planum a percuſſione motum mixtum ex progreſſiuo et rotatorio, atque ſic punctum aliquod erit D, quod primo a percuſſione (quam in inſtanti fieri ſupra poſuimus) momento etiamnum quieſcit: poterit autem punctum iſtud D conſiderari tanquam punctum, in quo planum fixum eſſe poſuimus §. 5. Sequitur exinde planum quieſcens et liberum talem a percuſſione motum accipere, vt ſtatim punctum D quieſcat, punctum autem percuſſum ea velocitate moueatur, quam acquireret maſſa $\frac{rt}{aa}$M ab eadem percuſſione directe facta: litterarum harum ſignificationes fuerunt definitae §. 5. Magna igitur problematis pars in in eo verſatur, vt punctum iſtud D in plano libero definiatur. In iſta vero disquiſitione incipiemus a caſu ſimpliciori ponendo ſcilicet loco plani ABC lineam rectam; nec enim difficile poſtea erit ſolutionem a linea ad figuram quamcunque extendere.

Problema.

§. 9. *Sit itaque primo loco linea recta* AC *vtcunque* Figura 3. *inaequaliter grauis et quieſcens eademque perpendiculariter percutiatur in* B, *quaeritur punctum* D, *quod primo a percuſſione momento quieſcit atque ſic puncti fixi, circa quod linea* AC *gyretur, vices obeat.*

Solu-

Solutio.

Aſſumo punctum D ibi fore, vbi inertia lineae A C minima ſit: vbicumque enim pluribus mutationibus locus eſt, natura ſemper ſeliget minimam; et quando inertia lineae grauis minima eſt, tunc graue impellens minimam a percuſſione patitur velocitatis mutationem.

Sit iam maſſa totius lineae grauis = M: ſit eius centrum grauitatis in *M*, atque centrum oſcillationis (quod nimirum adeſſet ſi linea ex puncto quaeſito D ſuſpenderetur) in N; erit maſſa in puncto percuſſionis B maſſae *M* ſubſtituenda vi §. 5. $= \frac{DM \times DN}{DB^2} \times M$; atque haec maſſa vi noſtrae hypotheſeos debet eſſe minor, quam ſi quoduis aliud punctum D ſeligatur. Huic autem hypoteſi ſatisfieri in fine diſſertationis demonſtrabimus, ſi punctum N cadat in B, id eſt, ſi punctum D tale ſumatur, vt centrum oſcillationis conueniens puncto ſuſpenſionis D cadat in B. Demonſtrauit porro *Hugenius*, ſi punctum B ſit centrum oſcillationis pro puncto ſuſpenſionis D, fore etiam punctum D centrum oſcillationis pro puncto ſuſpenſionis B, ita vt ambo puncta ſint reciproca: ſic itaque punctum D eſt perfecte definitum. Q. E. F.

§. 10. Non difficile eſt multis aliis modis idem ſoluere problema, hanc autem ſolutionem aliis praetuli, quod ipſa problematis indoles haud parum inde illuſtretur: nec enim inelegans theorema eſt, quod minor ſit percuſſio, ſi linea figatur in puncto definito D, quam ſi in quocunque alio puncto figatur. Caeterum poterit haec propoſitio etiam experimento illis probari, qui harum

rerum rudes ſunt: nempe ſi virga AC aquae ſupernatet atque percutiatur in puncto B, ſolum erit punctum D, idque digitis percipi poteſt, quod nihil a percuſſione patiatur, atque ſi globulus virgae ſit appoſitus, velocitatem a percuſſione eo maiorem accipiet, quo magis diſtet a puncto D: in ipſo autem hoc puncto nullam acquiret.

§. 11. Quia $DN = DB$ (per §. 9.) et quia maſſa in puncto percuſſionis B ſubſtituenda eſt generaliter $= \frac{DM \times DN}{DB^2} \times M$ (per §. 6.) erit nunc maſſa haec $= \frac{DM}{DB} \times M$; adeoque in virga libera punctum B a percuſſione non aliter mouebitur primo momento, quam maſſa ſimplex eadem vi directe percuſſa, quae fuerit $= \frac{DM}{DB} \times M$, atque punctum D eodem momento plane quieſcet: Vnde nunc oppido liquet ſolutio ſequentis problematis.

Problema.

§. 12 *Determinare in virga quieſcente* AC *vtcunque inaequaliter graui motum, quem accipiet a corpore elaſtico datae maſſae et data velocitate in punctum* B *perpendiculariter incidente; tum etiam motum ipſius corporis impingentis poſt percuſſionem.*

Solutio.

*S*it maſſa virgae AC rurſus $= M$: maſſa corporis impingentis $= m$; velocitas corporis impingentis $= v$; erit maſſa in B ſubſtituenda $= \frac{DM}{DB} \times M$ atque per vulgares regulas motuum a percuſſione erit velocitas puncti B poſt percuſſionem $= \frac{2m \times DB}{m \times DB + M \times BM} \times v$, adeoque velocita-

locitas centri grauitatis $M = \frac{2m \times DM}{m \times DB + M \times DM} \times v$. Itaque a percuſſione virga acquirit motum mixtum, progreſſiuum quo centrum grauitatis mouetur in linea recta ad AC perpendiculari, velocitate $\frac{2m \times DM}{m \times DB + M \times DM} \times v$ et rotatorium, quo punctum B rotatur circa centrum grauitatis velocitate $\frac{2m \times MB}{m \times DB + M \times DM} \times v$. Denique velocitas quam corpus impingens habebit poſt percuſſionem eſt $= \frac{m \times DB - M \times DM}{m \times DB + M \times DM} \times v$. Q. E. F.

§. 13. Quia velocitas puncti B per omnes velocitatis gradus transit, a quiete ſcilicet vsque ad eum velocitatis gradum, quem a percuſſione obtinet, dum interea punctum D plane quieſcit, conſequens eſt, ſi virga AC vtcunque gyretur circa punctum D atque ſic gyrata percutiatur, idem punctum D primo a percuſſione momento rurſus in quiete manſurum, et velocitatem puncti B recte definitum iri, ſi maſſae totius virgae, vt antea, ſubſtituatur in B maſſa $\frac{DM}{DB} \times M$. Notetur autem, motum gyratorium circa punctum D proprie eſſe motum mixtum, fingendo velocitates puncti D, ratione motus progreſſiui et rotatorii, eſſe contrarias et aequales.

§. 14. Cum praeterea mutatio velocitatis puncti percuſſi B pendeat vnice a velocitate relatiua vtriusque grauis, apparet etiam, ſi virga AC ante percuſſionem habeat motum progreſſiuum (praeter gyratorium circa D in ſuperiori paragrapho deſcriptum) in directione perpendiculari ad AC, fore vt velocitas puncti D ante et poſt percuſſionem eadem maneat, et a percuſſione muta-

tionem vnice orituram eſſe in motu gyratorio, qui fit circa punctum D. Nec enim motus, qui corpori percutienti et virgae communis eſt, quicquam ad velocitatum mutationem conferre poteſt.

§. 15. Ex iſtis duobus praecedentibus paragraphis emergit regula determinandi motum in virga AC poſt percuſſionem, quiſcunque fuerit ipſius motus mixtus ante percuſſionem, poteritque vel ipſum corpus percutiens eſſe virga alia pariter motu quocunque mixto lata, et in hac quoque virga motus poſt percuſſionem determinari.

Regula Generalis

Determinandi motum a percuſſione in duabus virgis motu quocunque tum progreſſiuo tum rotatorio ſe inuicem in puncto quocunque percutientibus.

Sit linea AC *percuſſa in puncto* B: *quaeratur per* § 9. *punctum* D, *tum etiam velocitas ipſi inſita*: *dico punctum illud velocitatem ſuam ante et poſt percuſſionem ſeruaturum eſſe* (*per* § 14); *idemque valebit pro altera linea graui. Deinde pro vtraque virga ſubſtituatur in puncto percuſſionis* B *maſſa* §. 11. *definita* (*confer* §. 13.) *et poterunt harum maſſarum velocitates poſt percuſſionem determinari per regulas iam diu inuentas. Cognitis autem velocitatibus pro duobus punctis* (*qualia in virga* AC *ſunt puncta* D *et* B) *poteſt exinde motus ſingulorum punctorum in vtraque virga definiri. Sequens analyſis rem magis illuſtrabit.*

Solutio Problematis analytica.

Virga AC nobis erit linea percuſſa atque in linea percutiente puncta velocitatesque analogas litteris minoribus

tibus deſignabo, quae in virga percuſſa litteris iisdem ſed maioribus denotantur: porro motus progreſſiuos vtriusque virgae in communem fieri plagam ponemus, adeo vt ſi plagae ſint oppoſitae, ſignum velocitatis in motu progreſſiuo corporis impingentis ſit negatiuum ponendum. Ita quoque ratione motus rotatorii in vtraque virga puncta percuſſa B et b in plagam hanc communem ferri conſiderabimus, quod ratione ſignorum velocitatibus praefigendorum recte erit obſeruandum.

Hisce monitis ſit maſſa lineae $AC = M$, lineae $ac = m$; velocitas centri grauitatis $M = U$ et velocitas centri grauitatis $m = u$: hisce velocitatibus deſignantur motus progreſſiui: ratione autem motuum rotatoriorum ponemus velocitatem puncti $B = V$ et puncti $b = v$, adeo vt velocitates abſolutae horum punctorum ſint $U + V$ et $u + v$. Inde ſequitur velocitas abſoluta puncti $D = U - \frac{DM}{BM} \times V$ et ſimilis velocitas puncti $d = u - \frac{dm}{bm} \times v$: Vtraque autem velocitas a percuſſione immutata manet. En igitur velocitates punctis D et d poſt percuſſionem conuenientes. Eſt porro maſſa in puncto B ſubſtituenda $= \frac{DM}{DB} \times M$ et in puncto b maſſa ſimilis $\frac{dm}{db} \times m$: ſunt itaque per regulas notas quaerendae velocitates corporum elaſticorum a percuſſione, cum maſſae corporum ſunt $\frac{DM}{DB} \times M$ et $\frac{dm}{db} \times m$ atque velocitas ante percuſſionem $U + V$ et $u + v$: Velocitates iſtae quaeſitae tales ſunt:

Velocitas abſoluta puncti B poſt percuſſionem =

$$u + v + \frac{dm \times DB \times m - DM \times db \times M}{dm \times DB \times m + DM \times db \times M} \times (u + v - U - V)$$

Velo-

Velocitas ſimilis puncti $b =$

$$u + v - \frac{2\,DM \times db \times M}{dm \times DB \times m + DM \times db \times M} \times (u + v - U - V)$$

Ex definitis velocitatibus punctorum D, d, B et b, ſequitur fore poſt percuſſionem velocitatem centri grauitatis $M =$

$$\frac{MB}{DB} \times U - \frac{DM}{DB} \times V + \frac{DM}{DB} \times (u + v) + \frac{DM \times dm \times DB \times m - DM^2 \times db \times M}{DB \times dm \times DB \times m + DB \times DM \times db \times M} \times (u + v - U - V)$$

ſimiliterque velocitatem centri grauitatis $m =$

$$\frac{mb}{db} \times u - \frac{dm}{db} \times v + \frac{dm}{db} \times (u + v) - \frac{2\,DM \times dm \times M}{dm \times DB \times m + DM \times db \times M} \times (u + v - U - V)$$

Velocitates iſtae poſteriores ad centra grauitatis pertinentes permanent durante motu in eodem ſtatu: ſed velocitates abſolutae punctorum B et b conſiderandae ſunt tanquam compoſitae ex velocitatibus motus progreſſiui et motus rotatorii, quorum demum vterque ſeorſim in ſtatu eodem permanet; velocitas autem motus rotatorii hic habetur, ſi a velocitate abſoluta ſubtrahatur velocitas motus progreſſiui. Atque ſic definita ſunt omnia ad motum vtriusque lineae poſt percuſſionem pertinentia. Q. E. F.

§. 16. Lubet hic aliquos ſolutionis iſtius enumerare caſus particulares.

Exemplum I.

Figura 4. Quaeritur qualis ſit futurus motus virgae grauis *ac* ſolo motu progreſſiuo indicato per *mm* progredientis atque puncto b in obſtaculum fixum B impingentis.

Hic conſideranda eſt maſſa lineae AC figurae tertiae tanquam infinita ſimulque quieſcens atque etiam velocitas

locitas rotatoria indicata per v eſt ponenda nulla: Eſt igitur $M=\infty$; $U=0$; $V=0$ et $v=0$: Hisce valoribus ſubſtitutis in praecedente paragrapho, reperietur centrum oſcillationis d (quod nimirum virgae ex puncto b ſuspenſae conuenit) ſua velocitate u in antecedentia motum continuare; punctum b eadem velocitate repelli et centrum grauitatis m habiturum eſſe velocitatem in antecedentia $u - \frac{2dm}{db} \times u$; ac ſi fuerit $dm = mb$, quieſcet poſt impulſum centrum grauitatis motusque, qui ante impulſum ſolus fuit progreſſiuus, poſt impulſum ſolus erit rotatorius: fit autem in linea vniformiter graui $dm = mb$ ſumendo $bc = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}) \times ac$.

Exemplum 2.

Sint ambae virgae AC et ac vniformis grauitatis habeantque maſſas aequales: occurrant ſuis extremitatibus C et c ſibi inuicem velocitatibus aequalibus et contrariis ſine vllo motu rotatorio, quaeritur hic motus a percuſſione.

In hoc exemplo eſt $M = m$; $U = u$; $V = 0$; $v = 0$; Figura 5.
$CM = \frac{1}{2}AC$; $cm = \frac{1}{2}ac$; $DM = \frac{1}{6}AC$; $dm = \frac{1}{6}ac$; puncta autem B et b coincidunt cum punctis C et c. Sic inuenitur velocitas puncti $d = u$ atque velocitas puncti $D = -u$, quod indicat ambo haec puncta priſtina ſua velocitate motum continuare: velocitas autem puncti b inuenitur $= -u$ et puncti $B = u$, ſic vt quoduis priſtina velocitate poſt impulſum retrogrediatur: denique centra grauitatis ab impulſu dimidiam ſeruabunt velocitatem ſeruata ea quam habuerunt motus plaga.

Si porro iisdem ſeruatis hypotheſibus omnibus ante impulſum ineſſe ponatur corporibus motus rotatorius, qui ratione punctorum B et b eandem habeat directionem impulſus momento cum motu corporis progreſſiuo atque eandem velocitatem, ita vt eo momento puncta A et a quieſcant, erit ſtatuendum, ſeruatis caeteris vt ante, $V = U$ et $v = u$, atque ſic fiet poſt impulſum

velocitas puncti $d = \frac{2}{3}u$
velocitas puncti $b = -2u$
velocitas puncti $m = 0$,

Velocitas autem ſimilium punctorum in altera virga ſunt ſub directione contraria eaedem. Videmus exinde fore, vt centra grauitatis poſt impulſum quieſcant atque puncta B et b circa eadem rotentur velocitate, quam immediate ante impulſum motu ſuo mixto habuerunt.

Exemplum 3.

Ponantur virgae ſe inuicem in centris grauitatis percutere; erit $DM = DB$ et $dm = db$, et quaecunque ſit velocitas rotatoria, erit $V = 0$ et $v = 0$, atque propterea fiet poſt percuſſionem

velocitas puncti $B = \frac{2mu + MU - mU}{m + M}$,

atque

velocitas puncti $b = \frac{2MU + mu - Mu}{m + M}$,

quae formulae indicant centra grauitatis eundem a percuſſione motum accipere, ac ſi corpora non rotarentur, motum autem rotatorium a percuſſione non mutari, quia nempe velo-

velocitas puncti D fit $=U-\frac{DM}{BM}\times V$

et

velocitas puncti $d=u-\frac{dm}{bm}\times v$,

in quibus formulis valores litterarum V et v, vtut infinite parui non ſunt negligendi.

§. 17. Inſtituto recte calculo, quem formulae noſtrae inſtituendum indicant, reperietur ſummam virium viuarum a percuſſione non immutari, et centrum grauitatis vtrique corpori commune velocitatem quoque ſuam ante et poſt percuſſionem eandem ſeruare. Hasce enim leges natura conſtantiſſime ſequitur.

§. 18. Hactenus de percuſſione ea, qua virgis in locis B et b perfectam ineſſe elaſticitatem poſuimus: ſint vero nunc omni elaſticitate deſtitutae virgae in loco percuſſionis; eadem erit problematis ſoluendi methodus: puncta nimirum D et d elaſticitatem ſuam non mutatam a percuſſione ſeruant; puncta vero B et b, poſtquam in iisdem maſſae $\frac{DM}{DB}\times M$ et $\frac{dm}{db}\times m$ loco maſſarum integrarum ſubſtitutae fuerunt, velocitatum mutationem a percuſſione patiuntur, quam eaedem maſſae in corporibus mollibus, iisdem velocitatibus ſe inuicem percutientibus, ſubeunt ſecundum leges cognitas.

§. 19. Haec quae ab initio paragraphi noni huc vsque monita fuerunt, omnes problematis noſtri partes latiſſime determinant pro duabus virgis rectis et vtcunque inaequaliter grauibus. At vero qui attente ſolutionem noſtram perlegerit, facile viderit ſolutionem ſeſe extendere ad plana qualiacunque et vtcumque inaequaliter grauia. Fig. 1. et 2.

uia. Quod ſi enim planum percutiatur in B in directione BR ad plani peripheriam perpendiculari, atque ſi per centrum grauitatis M ducatur DR ad BR perpendicularis, poterit id ipſum punctum R haberi pro puncto percuſſo in linea DR, poſito ſcilicet centro oſcillationis totius plani, ex puncto R ſuspenſi, in D: ſimul autem centra D circuli concentrici infinite propinqui deſcribantur atque maſſa plani inter quosuis circulos proximos poſita referatur ad particulam lineae DR inter eosdem circulos contentam: talis enim linea centrum oſcillationis pro eodem puncto ſuspenſionis R ſimiliter habebit in D, adeo vt tam in linea quam in plano motus gyratorius circa punctum D ſit idem cenſendus, dum motus quoque progreſſiuus in vtroque manifeſte eſt idem. Patet igitur quid faciendum ſit ad problematis noſtri ſolutionem pro duobus planis qualibuscumque; et ex paragrapho tertio apparet inſuper apparet, quomodo ſolutio a planis poſſit ad quaeuis corpora extendi, modo res tota ita ſit comparata, vt axis motus rotatorii ſibi conſtanter parallelus eſſe debeat atque libere in directum moueri poſſit.

Neque id morabitur Lectorem, quod vbique poſui directionem impulſus perpendicularem; ſi enim obliqua ſit, poterit illa reſolui in perpendicularem et parallelam; de illa pleniſſime egimus, haec autem nullam in motu mutationem producit.

§. 20. Denique etiam hoc notandum eſt, quod etſi §. 14. et ſequentibus directionem motus progreſſiui mox ante percuſſionem poſuerimus ad lineam AC perpendicularem, poſſit facile pro directione qualicunque res expediri hunc in modum.

Fac

Fac virgam AC ante percuſſionem duplicem habere motum, alterum rotatorium circa centrum grauitatis M, alterum progreſſiuum eundemque ad lineam AC obliquum; reſolues hunc poſteriorem in perpendicularem ad lineam alterumque eidem parallelum. Motus progreſſiuus perpendicularis cum rotatorio coniunctus eam a percuſſione accipiet mutationem quam iam expoſuimus: parallelus autem idem manebit qui fuit ante percuſſionem; patet inde omnis qui a percuſſione virgae AC inerit motus, idemque etiam patebit in virga altera percutiente, ſi et haec motum habere progreſſiuum obliquum ſtatuatur. Atque ſic problema noſtrum ex omni parte abſolutum puto.

Demonſtratio Propoſitionis §. 9. aſſumtae.

Quod in virga ex puncto D *ſuspenſa et centrum oſcillationis habente in* N, *maſſa expreſſa per* $\frac{DM \times DN}{DB^2} \times M$ *minor ſit quum centrum oſcillationis* N *cadit in punctum* B, *quam in quocunque alio caſu.* Figura 3.

Sumatur in figura tertia punctum *d* infinite propinquum puncto D ſitque centrum oſcillationis virgae ex puncto *d* ſuspenſae in *n*, erit ex natura *maximorum et minimorum*

$$\frac{DM \times DN}{DB^2} \times M = \frac{dM \times dn}{dB^2} \times M$$

ſiue

$$(DM \times DB + DN \times DB - 2DM \times DN)\, dD = DM \times DB \times nN.$$

Demonſtraui autem poſt *Hugenium* in *Comment. Tom. II.* " *pag.* 213. " ſi magnitudo eadem nunc breuius nunc " longius ſuſpenſa agitetur, fore vt diſtantiae axium oſcil- " lationis a centro grauitatis ſint reciproce proportiona- " les diſtantiis centrorum oſcillationis ab eodem grauita- " tis centro, " vi huius propoſitionis eſt

$$dM : DM = NM : nM,$$

vnde

$$dD \,.\, DM = nN : nM;$$

hinc

$$nN = \frac{nM \times dD}{DM},$$

hocque valore ſubſtituto in ſuperiori aequatione emergit

$$DM \times DB + DN \times DB - 2DM \times DN = nM \times DB$$

vel

$$DM \times DB + (DN - nM)DB = 2DM \times DN$$

vel

$$2DM \times DB = 2DM \times DN,$$

ſeu denique

$$DN = DB. \quad Q.\ E.\ D.$$

SOLV-

SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI CIRCA LVNVLAS A CIRCVLIS FORMATAS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

IN exercitationibus Mathematicis Celeb. *Dan. Bernoulli* Venetiis editis mentio ſit problematis cuiusdam, quod Vir Celeb. *Goldbachus* quondam propoſuiſſet, quo poſtulabatur vt in duabus lunulis oppoſitis a duobus circulis ſe mutuo interſecantibus formatis duae rectae aequales ita applicentur, vt a lunulis partes aequales abſcindant. Subiuncta vero eſt ibi etiam ſolutio huius problematis facilis quidem, ſed tantum particularis, cum eidem innumerabiles aliae ſolutiones ſatisfacere poſſint. Praeterea autem ſolutio, quae ibi eſt data, non ſolum Geometrico modo ſine analyſi exhibetur, ſed etiam analyſis ad id ſoluendum minus idonea cenſetur. Quod analyſios incommodum, etiamſi in pluribus problematis Geometricis allegari ſoleat, tamen mihi quidem non tam analyſi, quam analyſtae imputandum videtur. In hoc certe problemate clare oſtendam, analyſin ad id ſoluendum non ſolum non eſſe ineptam, ſed etiam methodo Geometricae Tabb. VIII. et IX.

cae

cae longe eſſe praeferendam, cum eius ope generalem huius problematis ſolutionem ſim traditurus, quod geometrica via vix praeſtari poterit.

Figura 1. §. 2. Sint igitur duo circuli $aObmS$ et AOBMS centris c et C deſcripti, qui ſe mutuo in O et S ſecent, lunulasque oppoſitas $ObmSAO$ et $OBMSaO$ formantes, in quibus ſecundum problema ita applicari debent rectae aequales Ab, aB, vt a lunulis areas aequales OAb et OaB abſcindant. Ad hoc ergo problema ſoluendum requiruntur primo ipſi circuli, deinde ſitus eorum mutuus ratione interſectionis, et tertio modus applicandi rectas aequales Ab et aB, vt areae OAb et OaB fiant inter ſe aequales. Ponamus autem figuram noſtram conditionibus problematis ſatisfacere; eritque tum $Ab = aB$ atque trilineum $OAb =$ trilineo OaB; plures enim aequationes problema nondum ſuppeditat.

§. 3. Cum areae OAb et OaB, quae aequales eſſe debent praeter rectas Ab et aB diuerſorum circulorum arcubus includantur, difficulter eae ad expreſſiones algebraicas reuocarentur. Quare ad hoc incommodum euitandum ducta recta Aa adiiciatur ad vtramque aream idem trilineum AOa, quo facto eſſe oportebit trilineum $AbOa =$ trilineo $aBOA$, qua aequatione vice prioris vtemur, cum vtrumque trilineum praeter rectas vnico arcu circulari claudatur. Tale autem trilineum ſi analytice exprimatur, expreſſio duabus conſtabit partibus, quarum altera erit algebraica, altera vero arcum circularem inuoluet, quae cum eſſe debeant inter ſe aequales, neceſſe eſt vt ſeorſim partes algebraicae inter ſe aequentur, atque etiam partes a circuli quadratura pendentes. Requiritur enim alge-

braica problematis ſolutio, quae non obtineretur, ſi quantitas algebraica arcui circulari aequaretur.

§. 4. Aequatur autem trilineam $bOaA$ ſectori cb Oa demto rectilineo ſpatio $bcaA$; atque trilineum BO Aa aequale eſt ſectori CBOA demto ſpatio rectilineo $BCAa$. Quamobrem cum ſit ſector $cbOa -$ ſpatio bc $aA =$ ſectori $CBOA -$ ſpatio $BCAa$, neceſſe eſt vt ſit ſector $cbOa =$ ſectori CBOA; et ſpatium $bcaA =$ ſpatio $BCAa$. Quo igitur areae OAb et OaB fiant aequales, atque problema Geometrice conſtrui queat, duplex aequatio erit reſoluenda, quarum prima eſt vt ſit ſector $bcOa =$ ſectori CBOA atque ſpatium $bcaA =$ ſpatio $BCAa$, cum quibus aequationibus ſi tertia coniungatur, qua eſſe debet $Ab = aB$, problemati erit ſatis factum.

§. 5. Quo igitur iſtae conditiones obtineantur, ponatur radius circuli $ca = cb = c$; atque radius $CA = CB = C$. Deinde ductis chordis ab et AB, in easque ex centris demiſſis perpendiculis cd et CD ſit $ad = ab = b$ atque $AD = AB = B$. His poſitis erit ſinus dimidii anguli $bca = \frac{b}{c}$, atque ſinus dimidii anguli $BCA = \frac{B}{C}$ poſito toto $= 1$. Hinc porro erit arcus $bOa = 2c.$ A ſin. $\frac{b}{c}$, vbi A ſin. $\frac{b}{c}$ denotat arcum cuius ſinus eſt $\frac{b}{c}$ in circulo radii 1; parique modo erit arcus $BOA = 2C.$ A ſin. $\frac{B}{C}$; atque ex his orietur ſector $bOac = c^2.$ A ſin. $\frac{b}{c}$, et ſector $BOAC = C^2.$ A ſin. $\frac{B}{C}$. Quamobrem ob aequalitatem ſectorum horum habebimus ſequentem aequationem $c^2.$ A ſin. $\frac{b}{c} = C^2.$ A ſin. $\frac{B}{C}$

§. 6. Cum ergo debeat eſſe A ſin. $\frac{b}{c}$: A ſin. $\frac{B}{C} =$ $C^2 : c^2$, atque diuerſi arcus circulares algebraice aſſignari nequeant, niſi rationem teneant rationalem, ante omnia requiritur vt ratio $C^2 : c^2$ ſit rationalis. Sit igitur $C^2 : c^2 = N : n$ denotantibus N et n numeros integros, eritque nA ſin. $\frac{b}{c} =$ N A ſin. $\frac{B}{C}$; atque porro debebit eſſe ſinus arcus n. A ſin. $\frac{b}{c} =$ ſin. arcus N. A ſin. $\frac{B}{C}$. Ex inuentione autem ſinuum arcuum multiplorum conſtat eſſe ſinum

$$\text{arcus } n\text{A ſin. } \frac{b}{c} = \frac{nb(c^2-b^2)^{\frac{n-1}{2}}}{1.\quad c^n} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3(c^2-b^2)^{\frac{n-3}{2}}}{1.\ 2.\ 3\ c^n}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5(c^2-b^2)^{\frac{n-5}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\quad c^n} - \text{etc.}$$

ſimilique modo ſinus arcus N. A ſin. $\frac{B}{C}$ exprimetur. Quamobrem ſequens habebitur aequatio algebraica

$$\frac{nb(c^2-b^2)^{\frac{n-1}{2}}}{1.\quad c^n} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3(c^2-b^2)^{\frac{n-3}{2}}}{1.\ 2.\ 3\quad c^n} +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5(c^2-b^2)^{\frac{n-5}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\quad c^n} - \text{etc.} =$$

$$\frac{NB(C^2-B^2)^{\frac{N-1}{2}}}{1.\quad C^N} - \frac{N(N-1)(N-2)B^3(C^2-B^2)^{\frac{N-3}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\quad C^N} +$$

$$\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)B^5(C^2-B^2)^{\frac{N-5}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\quad C^N} - \text{etc.}$$

quae aequatio ob N et n numeros integros ſemper finito conſtabit terminorum numero, ex eaque licebit pro data

data ratione inter C^2 et c^2 relationem quam B et b inter ſe tenere debent, definire.

§. 7. Determinabo autem in ſubſidium ſequentium operationum relationem inter B et b pro caſibus quibusdam ſimplicioribus; ſitque primo $C^2 : c^2 = 2 : 1$ ſeu $C = c\sqrt{2}$, vnde ob $N = 2$ et $n = 1$ ſequens prodibit aequatio $\frac{b}{c} = \frac{2B\sqrt{(C^2 - B^2)}}{C^2}$ ſeu $bc = B\sqrt{(C^2 - B^2)}$. Secundo ſit $C = c\sqrt{3}$, ſeu $N = 3$ et $n = 1$, eritque $\frac{b}{c} = \frac{3B(C^2 - B^2)}{C^3} - \frac{B^3}{C^3}$ ſiue $3bCc = 3BC^2 - 4B^3$. Tertio ſit $C = 2c$ ſeu $N = 4$ et $n = 1$, fiet $\frac{b}{c} = \frac{4B(C^2 - B^2)^{\frac{3}{2}}}{C^4} - \frac{4B^3\sqrt{(C^2 - B^2)}}{C^4}$ ſeu $4bcC^2 = (4BC^2 - 8B^3)\sqrt{(C^2 - B^2)}$. Quarto ſit $C^2 : c^2 = 3 : 2$ ſeu $N = 3$ et $n = 2$, erit $\frac{2b\sqrt{(c^2 - b^2)}}{c^2} = \frac{3BC^2 - 4B^3}{C^3}$. Quinto ſi fuerit $C^2 : c^2 = 4 : 3$ erit $\frac{3bc^2 - 4b^3}{c^3} = \frac{(4BC^2 - 8B^3)\sqrt{(C^2 - B^2)}}{C^4}$. Hique caſus ſufficiant ad exempla, quae afferemus, adornanda.

§. 8. Cum igitur primae conditioni, qua ſectores inter ſe debent eſſe aequales, ſit ſatisfactum determinata relatione chordarum ex data circulorum relatione, ad reliquas conditiones progrediamur, quarum ſecunda requirit vt quadrilaterum $bAac$ aequale ſit quadrilatero $BaAC$; vnde ſequens emergit aequatio $\triangle bac - \triangle baA = \triangle BAC - \triangle BAa$, quae quo analytice exprimatur demittantur ex punctis A et a in chordas ab et AB perpendicula Ae et aE, ſitque $Ae = p$ et $aE = P$, ex quibus illa aequatio per ſymbola ita exprimitur $b\sqrt{(cc - bb)} - bp = B\sqrt{(C^2 - B^2)} - BP$;

$-$BP, ex qua relatio perpendiculorum Ae et aE determinatur, ita vt dato altero alterum quoque innoteſcat.

§. 9. Tertia conditio requirit, vt ſit recta Ab aequalis rectae aB, ad quod obtinendum pono $de = q$, atque $DE = Q$; vt ſit $be = b + q$; $ae = b - q$ atque $BE = B + Q$ et $AE = B - Q$. Hinc orietur $Ab^2 = p^2 + b^2 + 2bq + q^2$; et $aB^2 = P^2 + B^2 + 2BQ + Q^2$, quare ſequens habebitur aequatio $p^2 + b^2 + 2bq + q^2 = P^2 + B^2 + 2BQ + Q^2$, ex qua relatio inter Q et q determinatur. Hae aequationes autem nondum ad coniunctionem circulorum reſpiciunt, ſed eaedem prodiiſſent, ſi vterque circulus ſeorſim fuiſſet conſideratus.

§. 10. Coniungendi autem circulos modus hoc determinatur, quod triangula baA et BAa commune habent latus Aa; erit igitur ex vtroque $Aa^2 = p^2 + b^2 - 2bq + qq = P^2 + B^2 - 2BQ + Q^2$. Haec autem aequatio, ſi ab illa quae ante eſt inuenta ſubtrahatur, dat $4bq = 4BQ$, atque ſi addatur prodit $2p^2 + 2b^2 + 2q^2 = 2P^2 + 2B^2 + 2Q^2$. Loco ergo duarum inuentarum poſtremarum aequationum ſubſtitui poſſunt hae ſimpliciores $bq = BQ$ atque $p^2 + b^2 + q^2 = P^2 + B^2 + Q^2$.

§. 11. Vocatis ergo vt fecimus $ca = cb = c$; $CA = CB = C$; $da = db = b$; $DA = DB = B$; $Ae = p$; $de = q$; $aE = P$ et $DE = Q$; problema per ſequentes quatuor aequationes ſoluetur

I. C^{a}

I. $C^2 A$ ſin. $\frac{B}{C} = c^2 A$ ſin. $\frac{b}{c}$

II. $B\sqrt{(C^2 - B^2)} - BP = b\sqrt{(c^2 - b^2)} - bp$

III. $BQ = bq$

IV. $P^2 + B^2 + Q^2 = p^2 + b^2 + q^2$.

Si autem ex tertia et quarta aequatione determinentur Q et q, earum loco ſequentes poterunt ſubſtitui $Q = b\sqrt{(1 + \frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2})}$ et $q = B\sqrt{(1 + \frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2})}$.

§. 12 Ad problema ergo ſoluendum ante omnia opus eſt, vt in duobus circulis inaequalibus aequales ſectores formentur, quod ſemper fieri poteſt, ſi areae circulorum inter ſe rationem habuerint vt numerus ad numerum. Hoc autem ope diuiſionis angulorum facile praeſtabitur; Sumto enim ſectore BCA pro arbitrio, ſector ſector bca obtinebitur ſumendo angulo bca tanto, vt $\angle bca : \angle BCA = AC^2 : ac^2$. Cum enim ſit A ſin. $\frac{b}{c}$: A ſin. $\frac{B}{C} = C^2 : c^2 = AC^2 : ac^2$; atque A ſin. $\frac{b}{c}$ exprimat dimidium angulum acb, pariterque A ſin. $\frac{B}{C}$ dimidium angulum ACB, erit $\angle bca : \angle BCA = AC^2 : ac^2$.

§. 13. Conſtitutis ergo in duobus circulis ſectoribus aequalibus, ſumatur ſuper chorda alterius circuli arbitraria altitudo, ſcilicet ſuper chorda ab altitudo $Ae = p$; ex qua quidem nondum conſtat punctum e ex quo punctum A innoteſceret. At cum ſit $de = q = B\sqrt{(1 + \frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2})}$; atque $B\sqrt{(C^2 - B^2)} - BP = b\sqrt{(c^2 - b^2)} - bp$; erit $P = \sqrt{(C^2 - B^2)} - \frac{b\sqrt{(c^2 - b^2)}}{B} + \frac{bp}{B}$ atque $P^2 - p^2 = C^2 - B^2 + \frac{b^2 c^2}{B^2} - \frac{b^4}{B^2} + \frac{b^2 p^2}{B^2} + \frac{2bp\sqrt{(c^2 - B^2)}}{B} - \frac{2b^2 p\sqrt{(c^2 - b^2)}}{B^2}$ —

$-\frac{2b\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B}-p^2$. Ex quibus elicitur $\frac{P^2-p^2}{B^2-b^2}=$
$$\frac{B^2C^2+b^2c^2-b^4-B^4+2Bbp\sqrt{(C^2-B^2)}-2b^2p\sqrt{(c^2-b^2)}-2Bb\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B^2(B^2-b^2)}$$
$-\frac{p^2}{B^2}$; atque $q^2=\frac{B^2C^2+b^2c^2-B^2b^2-b^4}{B^2-b^2}-p^2+$
$$\frac{2Bbp\sqrt{(C^2-B^2)}-2b^2p\sqrt{(c^2-b^2)}-2Bb\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B^2-b^2}.$$

Ex qua aequatione ſumto pro lubitu puncto *e* cognoſcetur punctum A, quo dato alter circulus ABMS facile deſcribetur. Namque ſuper A*a* conſtituatur triangulum AB*a* ſumendo AB $=$ 2B et *a*B $=$ A*b*, tumque ſuper AB fiat triangulum iſoſceles ACB ſumendo AC $=$ BC $=$ C et centro C radio AC $=$ BC $=$ C deſcribatur circulus ABMS, quo facto abſcindent rectae A*b* et *a*B, quae per conſtructionem ſunt aequales, a lunulis O*bm*SA et OBMS*a* areas aequales OA*b* et O*a*B, vt problema poſtulat.

§. 24. Cum igitur ſumto pro lubitu interuallo *de* $=q$, ipſi reſpondeat applicata *e*A $=p$; innumerabilia dabuntur puncta A, ex quibus poſitio alterius circuli determinabitur, quo ipſo quaeſtioni infinitis modis ſatisfiet. Omnia autem haec puncta A in curua quadam continua erunt poſita, cuius natura ſequenti aequatione eſt expoſita
$$p^2+q^2=\frac{2Bbp\sqrt{(C^2-B^2)}-2b^2p\sqrt{(c^2-b^2)}}{B^2-b^2}+$$
$$\frac{B^2C^2+b^2c^2-B^2b^2-b^4-2Bb\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B^2-b^2}$$

Ex qua aequatione intelligitur locum omnium punctorum A eſſe circulum cuius centrum in recta *cd*, ſi opus eſt producta ſit ſitum. Perſpicitur ergo duos circulos, in

in quibus duo ſectores aequales habentur, innumerabilibus modis ita coniuugi poſſe, vt problemati ſatisfiat.

§. 15. Haec eſt igitur generalis problematis ſolutio, ex qua poſtquam circuitus ille, in cuius peripheria ſita ſunt omnia puncta A fuerit deſcriptus, facilis quoque problematis conſtructio conſequitur. Quo autem omnes modi hoc problema ſoluendi clarius ob oculos ponantur, ex ſolutione vniuerſali particulares adornabimus, quas deducemus ex quantitate anguli, quo rectae bA et Ba in ſe mutuo inclinant. Obſeruaui enim hunc angulum a ſolis circulis et ſectoribus pendere, neque a variatione interſectionis mutari.

§. 16. Producantur itaque rectae bA, Ba, donec ſibi occurrant in Z; et analytice exprimatur quantitas anguli Z, quod fiet dum tangens ipſius quaeritur. Haec autem tangens ſequenti modo obtinebitur. Ex triangulo baA habetur primo tang. $b\mathrm{A}e = \frac{b+q}{p}$; et tang. $a\mathrm{A}e = \frac{b-q}{p}$ ex quibus reperitur tang. $b\mathrm{A}a = \frac{2bp}{p^2+q^2-b^2}$; quare tangens anguli $\mathrm{ZA}a$ erit $= \frac{2bp}{b^2-p^2-q^2}$. Simili modo erit tangens anguli $\mathrm{Z}a\mathrm{A} = \frac{2\mathrm{BP}}{\mathrm{B}^2-\mathrm{P}^2-\mathrm{Q}^2}$. Tangens gitur ſummae horum angulorum reperietur =

$$\frac{2bp(\mathrm{B}^2-\mathrm{P}^2-\mathrm{Q}^2)+2\mathrm{BP}(b^2-p^2-q^2)}{(\mathrm{B}^2-\mathrm{P}^2-\mathrm{Q}^2)(b^2-p^2-q^2)-4\mathrm{B}b\mathrm{P}p},$$

cuius negatiuo tangens anguli Z aequatur.

§. 17. Cum vero ſit $\mathrm{Q} = b\sqrt{(1+\frac{\mathrm{P}^2-p^2}{\mathrm{B}^2-b^2})}$ erit $\mathrm{B}^2-\mathrm{P}^2-\mathrm{Q}^2 = \mathrm{B}^2-b^2-\frac{\mathrm{B}^2\mathrm{P}^2+b^2p^2}{\mathrm{B}^2-b^2}$; atque ob $q = \mathrm{B}\sqrt{(1+\frac{\mathrm{P}^2-p^2}{\mathrm{B}^2-b^2})}$, erit $b^2-p^2-q^2 = b^2-\mathrm{B}^2-\frac{\mathrm{B}^2\mathrm{P}^2+b^2p^2}{\mathrm{B}^2-b^2}$. Ex quibus

quibus reperitur $2bp(B^2-P^2-Q^2)+2BP(b^2-p^2-q^2) = 2(B^2-b)(bp-BP)-\frac{2(B^2P^2-b^2p^2)(bp+BP)}{B^2-b^2} = -\frac{2(BP-bp)[(B^2-b^2)^2+(BP+bp)^2]}{B^2-b^2}$. Deinde erit $(B^2-P^2-Q^2)(b^2-p^2-q^2-4BbPp = \frac{(B^2P^2-b^2p^2)^2}{(B^2-b^2)^2}-(B^2-b^2)^2-4BbPp = \frac{(B^2P^2-b^2p^2)^2-(B^2-b^2)^4-4BbPp(B^2-b^2)^2}{(B^2-b^2)^2} = \frac{[(BP+bp)^2+(B^2-b^2)^2][(BP-bp)^2-(B^2-b^2)^2]}{(B^2-b^2)^2}$.

§. 18. His ergo valoribus in expreſſione inuenta ſubſtitutis prodibit tangens anguli $AZa =$
$\frac{2(B^2-b^2)(BP-bp)[(BP+bp)^2+(B^2-b^2)^2]}{[(BP+bp)^2+(B^2-b^2)^2][(BP-bp)^2-(B^2-b^2)^2]} = \frac{2(B^2-b^2)(BP-bp)}{(BP-bp)^2-(B^2-b^2)^2}$. Ex qua expreſſione intelligitur tangentem ſemiſſis anguli ad Z fore $=\frac{B^2-b^2}{BP-bp}$. Cum vero ſit $B\surd(C^2-B^2)-BP = b\surd(c^2-b^2)-bp$, erit tang. ang. $\frac{1}{2}Z = \frac{B^2-b^2}{B\surd(C^2-B^2)-b\surd(c^2-b^2)}$ ex qua expreſſione intelligitur quantitatem anguli Z per ſolas quantitates C, c, B, b determinari, neque a litteris variabilibus P, p, Q, et q pendere.

§. 19. Ponatur angulus $Z=0$, quo rectae Ab et aB partes aequales a lunulis abſcindentes fiant inter ſe parallelae, qui eſt caſus, quem *Celeb. Daniel Bernoulli* ſolum dedit ſolutum; Hoc ergo poſito fiet tang. $\frac{1}{2}Z = 0$, ideoque erit $B^2-b^2=0$ et $B=b$. Cum autem ſit $B=b$ ex aequatione $BQ=bq$ ſequitur fore $Q=q$; atque aequatio $P^2+B^2+Q^2=p^2+b^2+q^2$ ſuppeditabit $P^2=p^2$; ex qua ſequitur fore vel $P=p$ vel $P=-p$. Aequalitas autem $P=p$ ad inſtitutum noſtrum eſt inutilis; ex ea enim ſequeretur fore $C=c$, adeoque circuli forent aequales, qui caſus in problema non cadit. Quod autem futu-

futurum eſſet $C=c$ declarat haec aequatio $B\sqrt{(C^2-B^2)} - BP = b\sqrt{(c^2-p^2)} - bp$.

§. 20. Sit igitur $P=-p$, quo poſito aequatio $B\sqrt{(C^2-B^2)}-BP=b\sqrt{(c^2-b^2)}-bp$ tranſibit in hanc $2p=\sqrt{(c^2-b^2)}-\sqrt{(C^2-B^2)}$, vnde elicitur $p=\frac{\sqrt{(c^2-b^2)}-\sqrt{(C^2-B^2)}}{2}$ et $P=\frac{\sqrt{(C^2-B^2)}-\sqrt{(c^2-b^2)}}{2}$. Erit ergo p quantitas conſtans neque a q pendebit, et hanc ob rem locus puncti A erit linea recta parallela chordae ba et ab ea diſtans interuallo $\frac{\sqrt{(c^2-b^2)}-\sqrt{(C^2-B^2)}}{2}$, quae expreſſio ſi fuerit affirmatiua hoc interuallum a chorda ab verſus dextram eſt capiendum, ſin autem fuerit negatiua verſus ſiniſtram; ſi quidem figura ita delineatur, vti in tabula repraeſentatur.

§. 21. Cum praeterea ſit $B=b$, non ſolum circulorum inter ſe debebunt eſſe aequales, ſed etiam chordas AB, ab aequales eſſe oportet. Quare ſi ambo circuli ſuper hac chorda communi deſcribantur, vt in fig. 2. vbi $\alpha\beta$ eſt chorda communis, et c et C circulorum centra, erit lunula $M\alpha m\beta$ quadrabilis. Ob aequales enim ſectores $c\alpha m\beta$ et $C\alpha M\beta$ erit lunula $M\alpha m\beta$ = ſpatio $C\alpha c\beta$. Quae proprietas cum ſit communis omnium lunularum quadrabilium, perſpicuum eſt ope cuiusuis lunulae quadrabilis problema propoſitum ſolui poſſe, ita vt lineae partes aequales abſcindentes inter ſe fiant parallelae; atque etiam intelligere licet alio modo problemati in hoc ſenſu ſatisfieri non poſſe. Figura 2.

Fig. 2. et 3. §. 22. Data ergo quacunque lunula quadrabili $M\alpha m \mathfrak{G}$, problema ſequenti modo reſoluetur. Deſcribatur circulus $bmnOaS$ aequalis circulo $\alpha m \mathfrak{G} c$, in eoque applicetur chorda $ab = \alpha \mathfrak{G}$, in eamque ex centro c demittatur perpendiculum ed producendum ſi opus. Iam cum linea recta, in qua omnia puncta A ſunt ſita, ſit parallela chordae ab ab eaque interuallo $p = \frac{\sqrt{(c^2 - b^2)} - \sqrt{(C^2 - B^2)}}{2}$ diſtet, erit $p = \frac{c\delta - C\delta}{2} = \frac{-Cc}{2}$. Ex altera igitur parte centri in recta $cnad$ capiatur $df = \frac{1}{2} Cc$, et per f ducatur recta ipſi ba parallela infinita $mf\alpha B$, quae erit locus omnium punctorum A.

§. 23. Sumto ergo in hac recta vbiuis puncto A ſaltem intra circulum aOb, quo recta Ab tota in circulo hoc ſit ſita. Deinde ex a ipſi Ab ducatur parallela et aequalis aB, quae rectae mA occurat in B ita vt ſit $AB = ab$, et figura $AbaB$ parallelogrammum. Alter igitur circulus ita deſcribi debet, vt per puncta A et B tranſeat, id quod facile perficitur cum radius eius $C\alpha = C\mathfrak{G}$ ſit datus. Ex vna ergo lunula quadrabili data infinitis modis duo circuli lunulam formantes ita componi poſſunt, vt rectae aequales areas abſcindentes ſint inter ſe parallelae. Atque in hac conſtructione continetur ſolutio problematis *Cel. Dan. Bernoulli* loco cit. data.

§. 24. Ponamus nunc angulum ad Z eſſe rectum, adeoque $\frac{1}{2}$ Z ſemirectum, cuius tangens ſinui toti 1 aequatur. Erit igitur $B^2 - b^2 = B\sqrt{(C^2 - B^2)} - b\sqrt{(c^2 - b^2)}$, atque $B^2 - b^2 = BP - bp$, ex qua fit $P = \frac{bp}{B} + \frac{B^2 - b^2}{2}$ atque $\frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2} = \frac{-p^2}{B^2} + \frac{2bp}{B^2} + \frac{B^2 - b^2}{B^2}$, vnde erit $q^2 = 2B^2 - (b - p)^2$

$(b-p)^2$ ſeu $q^2+(b-p)^2=2B^2$. Locus ergo punctorum A erit circulus radio $=B\sqrt{2}=\frac{AB}{\sqrt{2}}$ deſcriptus, cuius centrum in recta cd ſi opus eſt producta erit ſitum, atque a d verſus dextram diſtabit interuallo $b=bd=\frac{1}{2}ab$.

§. 25. Ad hunc vero caſum requiritur, vt ſectores circulorum non ſolum ſint aequales, ſed inſuper etiam vt ſit $B^2-b^2=B\sqrt{(C^2-B^2)}-b\sqrt{(c^2-b^2)}$. Quae aequalitas quo cum ſectorum aequalitate coniungatur, conueniet ad exempla deſcendere, et primo quidem ſit $C=c\sqrt{2}$, erit $bc=B\sqrt{(C^2-B^2)}=B\sqrt{(2c^2-B^2)}$ et $c^4-bbcc=(c^2-B^2)^2$; vnde fiet $c\sqrt{(c^2-b^2)}=c^2-B^2$ et $B^2=c^2-c\sqrt{(c^2-b^2)}$. Quocirca habebitur $c^2-b^2-c\sqrt{(c^2-b^2)}=bc-b\sqrt{(c^2-b^2)}$ ſeu $b^2+bc-cc=(b-c)\sqrt{(c^2-b^2)}$ quae quadrata dat $2b^4=bbcc$ ſeu $b=\mp\frac{c}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{(c^2-b^2)}=\frac{c}{\sqrt{2}}$. Erit ergo angulus bca rectus et proinde angulus ACB ſemirectus; quia hic circulus duplo maior ponitur quam ille.

§. 26. Prodiit hic valor ipſius b negatiuus, quo $\sqrt{(c^2-b^2)}$ affirmatiuum obtineat valorem, atque ſector abc minor fiat quadrante. Eadem vero prodiiſſet expreſſio, ſi angulus ad Z tribus rectis aequalis poſitus fuiſſet; tum enim orta eſſet iſta aequatio $B^2-b^2=b\sqrt{(c^2-b^2)}-B\sqrt{(C^2-B^2)}$, quae reducta idem dat quod ante inuenimus, praeterquam quod hinc prodit $b=\frac{+c}{\sqrt{2}}$. Vtraque vero determinatio eodem redit, nam cum hic ſit b negatiuum, alia differentia non reſultat, niſi quod centrum circuli puncta A continentis ex altera parte ipſius d ſit capiendum, id quod etiam altera ſolutio poſtulat.

Figura 4. §. 27. Deſcribantur ergo duo circuli, quorum alter altero ſit duplo maior, atque in minore abſcindatur quadrans abc; in maiore vero octans ACB, qui duo ergo ſectores inter ſe erunt aequales. Ductis nunc in chordis ab, AB ex centris c et C perpendiculis cd, CD; erit $ac = c$; $AC = C = c\sqrt{2}$, $ad = bd = b = \frac{c}{\sqrt{}}$, et $cd = \frac{c}{\sqrt{2}}$; $AD = B = c\sqrt{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})}$ et $CD = c\sqrt{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}$. Si nunc CD producatur in H, vt ſit $DH = AD$, erit $AH = B\sqrt{2}$, ideoque radius circuli, qui eſt locus omnium punctorum A; prout ante explicuimus. Ex his vero ſequenti modo problema propoſitum ita reſoluetur, vt rectae abſcindentes ſint inter ſe normales.

Tabula IX. Figura 1. et Tabula VIII. Figura 4. §. 28. Deſcribatur nunc minor circulus abc, et in cd producta ſumatur $dg = b = bd$, et centro g radio $gb = AH = B\sqrt{2} = c\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ deſcribatur circulus ibkA, qui erit locus omnium punctorum A. Secabit is autem cd in b et chordam ab in i et k, vt ſit $db = c\sqrt{(2 - \sqrt{2})} - \frac{c}{\sqrt{2}}$, et $di = dk = c\sqrt{(\frac{3}{2} - \sqrt{2})} = c - \frac{c}{\sqrt{2}} = bc - bd$. Sumto nunc in hac circuli peripheria puncto quocunque A, ductaque Ab, ad eam ex a normalis et ipſi Ab aequalis ducatur aB. Deinde radio $CA = CB = c\sqrt{2}$ deſcribatur circulus BOAC, quo facto erit areae O Ab = areae OaB.

§. 29.

§. 29. Si punctum A capiatur in ipſo puncto b, circuli ſe ita interſecabunt vt fig. 2. repraeſentat, eritque $OAb = OaB$. Sin autem punctum A capiatur in i vt in fig. 3. repraeſentatur, erit aB ad ab normalis et maioris circuli centrum C in Ba producta erit ſitum, eritque $aC = Aa = c$ et $BC = ab$. Si denique punctum A in k capiatur, prodibit fig. 4. in qua iterum aB ad ab eſt normalis, et centrum maioris circuli C in ba producta erit ſitum. Habebitur autem $aC = aB = c$; et $AC = BC = ab$; vnde duorum poſtremorum caſuum conſtructio facillime conſequitur. Tabula IX. Figura 2. Figura 3. Figura 4.

DE

VARIIS MODIS CIRCVLI QVADRATVRAM NVMERIS PROXIME EXPRIMENDI.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Archimedes et qui ipſum ſunt ſecuti rationem diametri ad peripheriam in numeris proximam inueſtigauerunt ex polygonis regularibus circulo tam inſcriptis quam circumſcriptis. Cum enim perimeter polygoni inſcripti minor, circumſcripti vero maior ſit ipſa circuli peripheria, ſatis commodum hinc deduxerunt modum limites intra quos peripheria contineatur, definiendi; praeſertim cum hi limites eo propius ad ſe inuicem accedant, quo plurium laterum polygona accipiantur. Ita cum poſito radio circuli $= 1$, latus polygoni 96. laterum inſcripti ſit

$$= \surd(2 - \surd(2 + \surd(2 + \surd(2 + \surd 3),$$

latus vero circumſcripti totidem laterum

$$= \frac{2\surd(2 - \surd(2 + \surd(2 + \surd 2 + 3)}{\surd(2 + \surd(2 + \surd(2 + \surd 2 + \surd 3)},$$

ſequentes prodibunt limites intra quos tota peripheria circuli continetur, minor ſcilicet

$$96\surd(2 - \surd(2 + \surd(2 + \surd(2 + \surd 3)$$

et

et maior

$$\frac{192\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})})}}{\sqrt{(2+\sqrt{2})}+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})}}.$$

§. 2. Perſpicitur autem ex hoc ſolo exemplo quam difficile et operoſum ſit limites hos in numeris rationalibus ſaltem exhibere propter tot totiesque repetitas radicis quadratae extractiones: qui labor etiam eo maior euadit, ſi polygona adhuc plurium laterum conſiderentur: adeo vt per hunc modum ne quidem ſperanda fuiſſet exactiſſima diametri ad peripheriam ratio, quae nunc quidem conſtat, et in fractionibus decimalibus ad 127 figuras eſt producta: Poſita nimirum diametro = 1, exprimetur peripheria ſequenti fractione decimali.

3, 14159265358979323846264338327950288419
71693993751058209749445923078164062862
08998628034825342117067982148086513272
3066470938446 +

cuius fractionis centum cyphrae priores *Cl. Machino* debentur, omnes vero *Cl. Lagny* peculiari modo etiamnunc celato elicuit.

§. 3. Methodo ergo Archimedeae per polygona inſcripta et circumſcripta procedenti merito praeferenda eſt altera methodus hoc potiſſimum tempore exculta, qua circuli peripheria per ſeries infinitas conuergentes exprimi ſolet. Si enim huiusmodi ſeries vehementer conuergat, atque inſuper ipſi ſeriei termini facile in fractiones decimales conuerti queant, multo minori opera ratio diametri ad peripheriam proxima numeris rationalibus exprimi poterit, quam per illam alteram methodum, quae

tot

tot radicum extractiones requirit. Quo autem hac ratione calculus commode ad finem perduci queat, ſeries ad hoc inſtitutum idoneae ſunt ſeligendae, quas duo ſequentia requiſita, vti iam innui, habere oportet. Primo ſcilicet, ſeries debet eſſe vehementer conuergens, ſeu eiusmodi, vt quiuis terminus multo ſit minor praecedente, quo non admodum multis terminis accipiendis ratio verae ſatis propinqua obtineatur. Quo pauciores enim termini a vero valore minime differunt, eo aptior erit cenſenda ſeries ad veram diametri ad peripheriam rationem dignoſcendam.

§. 4. Alterum requiſitum poſtulat vt ſinguli ſeriei termini non ſint admodum compoſiti, ſeu ſimplicibus conſtent numeris. Quo magis enim ſinguli termini fuerint complicati; eo maiore labore quiuis in fractionem decimalem conuertetur, et fortaſſe plus operae requiretur ad decem terminos colligendos, quam mille terminos alius ſeriei ſimplicioris, tanto minus autem conuergentis. Deinde vero ad calculum faciliorem reddendum quisque terminus ita debet eſſe comparatus, vt praecedente iam in fractionem decimalem euoluto, ſequens ex eo facile inueniri queat; quae proprietas potiſſimum in ſeries geometricas iisque affines cadit, in quibus quilibet terminus ex praecedente per ſolam diuiſionem obtinetur. Hancobrem ex ſeriebus, quibus arcus circulares exprimi ſolent, eae praecipue ad hunc vſum erunt accommodatae, quae ex tangente data arcum reſpondentem definiunt; hae enim a ſeriebus geometricis hoc tantum differunt, quod ſinguli termini per numeros impares inſuper ſint diuiſi, vnde in calculo parum naſcitur moleſtiae.

§. 5.

§. 5. Reiectis igitur aliis ſeriebus, quibus arcus vel ex ſinu vel chorda definitur, tanquam ad noſtrum inſtitutum minus idoneis, praecipue eam ſeriem contemplabimur, qua ex data tangente arcus circuli reſpondens determinatur. Eſt autem poſito radio circuli $= 1$, arcus tangenti x reſpondens $= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} -$ etc. in infinitum; ex qua intelligitur, quo minor accipiatur tangens x eo facilius arcum reſpondentem aſſignari poſſe. Poſito ſcilicet $x = \frac{1}{10}$, facili negotio arcus tangenti $\frac{1}{10}$ reſpondens in fractione decimali etiam ad mille figuras definiri poſſet; minori vero etiam opera arcus determinaretur, qui tangenti $\frac{1}{100}$ vel $\frac{1}{1000}$ etc. reſponderet. Sed hinc ne minimum quidem ſubſidium conſequitur ad rationem, quam diameter ad totam peripheriam tenet, cognoſcendam; cum omnes iſtiusmodi arcus, quorum tangentes ſunt $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ſeu tales, quae ſeriem vehementer conuergentem et ſimul leui labore ſummabilem reddant, cum integra peripheria ſint incommenſurabiles, atque ratio inter eos et peripheriam aſſignari penitus nequeat.

§. 6. Quo igitur huius ſeriei ope ratio, quam diameter ad peripheriam tenet, inueſtigari poſſit, talis tangens pro x ſubſtitui debet, cuius arcus reſpondens ad totam peripheriam rationem habeat cognitam. Arcuum autem cum tota peripheria commenſurabilium vnicus datur, qui tangentem habeat rationalem, isque eſt arcus $45°$, eius ſcilicet tangens radio circuli 1. aequatur. Poſito ergo $x = 1$, prodibit octaua totius peripheriae pars

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

quae eſt ipſa ſeries Leibnitiana, ita vt hinc prodeat ratio

ri ad peripheriam vt 1 ad

$$4(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\text{etc.}).$$

Haec autem ſeries tam parum conuergit, vt plures quam 10^{50} termini colligi deberent, quo fractio decimalis ad centum tantum figuras extendatur; qui labor fere in aeternum ſuperari non poſſet. plura quidem habentur compendia, quibus iſta ſummatio facilior reddi poſſet, ſed cum iis haec ſeries in alias transformetur, in ſeries alias magis conuergentes potius inquiram, quibus immediate ſcopus intentus obtineri queat.

§. 7. Aliud igitur ſubſidium ſupereſſe non videtur, niſi vt arcus talis quaeratur, cuius tangens quidem ſit irrationalis, ſed tamen vnico conſtet termino; ſi enim pro x quantitas irrationalis magis compoſita ſubſtitueretur, tum labor ad terminos colligendos inſuperabilis euaderet, etiam ſi ſeries maxime conuergeret. Duo autem tantum extant huiusmodi arcus, alter 60° alter 30°, quorum illius tangens eſt $=\sqrt{3}$ huius vero $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ponamus ergo $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, nam pro x non ſubſtitui conuenit $\sqrt{3}$, quia ſeries diuergens oriretur; eritque duodecima totius peripheriae pars

$$=\frac{1}{1.\sqrt{3}}-\frac{1}{3.3\sqrt{3}}+\frac{1}{5.3^2\sqrt{3}}-\frac{1}{7.3^3\sqrt{3}}+\frac{1}{9.3^4\sqrt{3}}-\text{etc.}$$

vnde ratio diametri ad peripheriam prodit vt

$$1 \text{ ad } \frac{2\sqrt{3}}{1}-\frac{2\sqrt{3}}{3.3}+\frac{2\sqrt{3}}{5.3^2}-\frac{2\sqrt{3}}{7.3^3}+\text{etc.}$$

quae ſeries iam ſatis conuergit, cum quisque terminus plus quam ter minor ſit praecedente. Colligendis autem circiter 210 terminis, ratio in fractionibus decimalibus ad centum figuras exacta obtinebitur, qui labor iam ſuperabilis foret.

§. 8.

§. 8. Ope huius ſeriei etiam reuera a Geometris Anglis ratio diametri ad peripheriam in fractionibus decimalibus vsque ad 74 figuras exacta eſt determinata; atque integer calculus extat in tabulis mathematicis a *Scharpio* aliisque editis. Maxima autem huius calculi difficultas in hoc conſiſtit, quod ante omnia radicem quadratam ex 3 in fractionibus decimalibus ad tot figuras extrahi oportet, ad quot ratio quaeſita exacta eſſe debet. Inuenta autem fractione decimali ad 100 v. gr. figuras iuſta, quae ipſi $2\sqrt{3}$ ſeu $\sqrt{12}$ ſit aequalis, tum haec fractio continuo per 3 eſt diuidenda, quo obtineantur termini

$$\frac{2\sqrt{3}}{1},\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3^2},\ \frac{2\sqrt{3}}{3^3}\ \text{etc.}$$

Quo facto iſti termini ſucceſſiue per numeros impares 1. 3, 5, 7, etc. ſunt diuidendi, vt prodeant ipſi ſeriei termini

$$\frac{2\sqrt{3}}{1},\ \frac{2\sqrt{3}}{3.3},\ \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2},\ \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3}\ \text{etc.}$$

Denique ſumma terminorum ordine parium a ſumma ordine imparium ſubtrahatur, et reſiduum dabit valorem peripheriam circuli exprimentem, cuius diameter eſt $=1$.

§. 9. Antequam autem exponam; quomodo ope eiusdem ſeriei, qua arcus ex data tangente exprimitur, proxima ratio diametri ad peripheriam multo facilius et exactius definiri queat, conueniet compendium aliquod monſtraſſe, cuius beneficio huiusmodi ſerierum ſumma multo leuiori opera inueniri poterit. Scilicet cum arcus tangenti $\frac{1}{p}$ reſpondens ſit

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} + \text{etc.}$$

 Hu-

Huius ſeriei ponamus iam n terminos in vnam ſummam eſſe collectos, exiſtente n numero pari, ſummamque inuentam eſſe $= S$, dico fore ſummam totius ſeriei in infinitum continuatae

$$= S + \frac{1}{p^{2n-1}}\left(\frac{1}{(1+p^2)(2n-1)} - \frac{2p^2}{(1+p^2)^2(2n-1)^2} + \frac{2^2(p^4-p^2)}{(1+p^2)^3(2n-1)^3} - \frac{2^3(p^6-4p^4+p^2)}{(1+pp)^4(2n-1)^4} + \text{etc.}\right)$$

Reliquorum ergo terminorum ſummatio reducitur ad ſummationem alius ſeriei, in qua quisque terminus circiter $2n-1$ vicibus minor eſt praecedente; ita vt quo plures termini actu fuerint collecti, iſta noua ſeries eo magis fiat conuergens.

§. 10. Quamuis haec noua ſeries, quae ſummam omnium reliquorum terminorum prioris ſeriei complectitur, vehementer conuergat, tamen, ad eius ſummam inueniendam noua quoque compendia adhiberi poſſunt. Poſita enim ſumma

$$\overset{1}{\frac{1}{p}} - \overset{2}{\frac{1}{3p^3}} + \overset{3}{\frac{1}{5p^5}} - - - - - - \overset{n}{\frac{1}{(2n-1)p^{2n-1}}} = S,$$

erit arcus, cuius tangens eſt $\frac{1}{p}$

$$= S + \frac{1}{p^{2n-1}(2n(1+pp)+p^2-1)} \text{ proxime;}$$

qui valor eo erit exactior, quo plures termini actu fuerint collecti, ſeu quo maior fuerit numerus n, modo ſit par vti monui. Atque ſi fuerit $n = p^{n}$ tum haec forma fractionem decimalem iuſtam reddet ad tot figuras, quot

quot exprimit $(2n+3+3\mu)lp$. Facto autem breuitatis gratia

$$\frac{2}{(1+pp)(2n-1)} = q$$

erit vera ſumma ſeriei

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \text{etc. in infinitum continuatae}$$

$$= S + \frac{1}{2p^{2n-1}}\left(\frac{q}{(1+qp^2+q^2p^2-q^3(2p^4-p^2)+q^4(4p^6-8p^4+p^2)\text{etc.}}\right)$$

ſeu

$\frac{1}{2p^{2n-1}}$ denuo diuidi debet per

$$\frac{1}{q}+p^2+qp^2-q^2(2p^4-p^2)+q^3(4p^6-8p^4+p^2)-\text{etc.}$$

et quotus reſultans ad S adiectus dabit arcum, cuius tangens $=\frac{1}{p}$.

§. 11. His expoſitis ſubſidiis, quae conſequentur ex methodo mea ſeries ſummandi alibi tradita, progredior ad aliam viam multo faciliorem aperiendam, qua eiusdem ſeriei arcum ex data tangente exprimentis ope ratio diametri ad peripheriam quantumuis exacte leui opera definiri poterit, ſine vlla taedioſa radicum extractione. Reſoluo ſcilicet arcum cuius tangens eſt $=1$ in duos pluresue arcus, quorum tangentes ſint rationales. Cum enim horum arcuum tangentes ſint vnitate minores, ex iis per ſeriem generalem arcus ipſi facile determinari poterunt. Qui arcus in ſe ſpectati etiamſi cum tota peripheria ſint incommenſurabiles, tamen quia coniunctim ſumti arcui 45 graduum cuius tangens $=1$, aequantur; eorum ſumma dabit octauam totius peripheriae partem, ex qua ratio diametri ad peripheriam quaeſita ſponte fluit. Poſito enim $\alpha =$

 arcui

arcui cuius tangens $=1$, erit diameter ad peripheriam vt 1 ad 4α

§. 12. Ponamus ergo $At\,1 = At\frac{1}{a} + At\frac{1}{b}$ debebit eſſe $1 = \frac{a+b}{ab-1}$; vnde fiet $ab-1 = a+b$ atque $b = \frac{a+1}{a-1}$. Quo autem a et b fiant numeri integri, quod ad calculum facilorem reddendum requiritur, pono $a=2$, eritque $b=3$. Arcus ergo cuius tangens $=1$, quem poſui $=\alpha$ aequalis eſt ſummae arcuum quorum tangentes ſunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ Quocirca arcus α aequabitur aggregato duarum ſequentium ſerierum

$$+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\frac{1}{7.2^7}+\text{ etc.}$$
$$+\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\text{ etc.}$$

quarum vtraque magis conuergit, quam illa ſuperior ex tangente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ deducta, nec vlla radicum extractione impeditur. Quare ope harum duarum ſerierum ratio diametri ad peripheriam leuiori negotio ad multo plures figuras exacta definiri poterit, quam per vnicam illam ſeriem fieri licuit, praeſertim ſi ſubſidia indicata adhibeantur.

§ 13. Si nunc ſeriei

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5\,2^5}-\text{etc.}$$

ſumma in fractionibus decimalibus deſideretur iuſta ad centum figuras, tum colligi debent 154 termini, atque ad eorum ſummam addi oportet $\frac{1}{2^{307}.1543}$, quo ſumma quaeſita obtineatur; vnico ſcilicet ſubſidio §. 10. indicato vtor, quo tota ſeriei ſumma erat

$$= S + \frac{1}{p^{2n-1}(2n(1+pp)+pp-1)}.$$

Sin

Sin autem ſumma ad 200 figuras deſideretur tum 318 termini actu colligi debebunt. Altera vero ſeries

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} \text{ etc.}$$

ad fractionem decimalem, quae ne in centeſima quidem figura fallat, reducetur colligendis actu 96 terminis; quo autem ad ducentas figuras exacta obtineatur, 200 termini actu ſunt colligendi. Ad rationem ergo diametri ad periperiam in fractione decimali ad 100 figuras iuſta inueniendam ſimul 250 termini addi debent, dum ad idem obtinendum ex ſerie

$$\frac{1}{1\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2\sqrt{3}} - \text{etc.}$$

ſola plures quam 200 termini addi debent.

§. 14. His autem veſtigiis inſiſtendis in promtu erit arcum α cuius tangens $=1$ infinitis aliis modis in duos pluresue arcus reſoluere, quae ſeries multo magis conuergentes producant. Cum enim ſit

$$At\frac{1}{p} = At\frac{1}{p+q} + At\frac{q}{p^2+pq+1},$$

erit

$$At\tfrac{1}{2} = At\tfrac{1}{3} + At\tfrac{1}{7}.$$

Quare cum ſit

$$\alpha = At\tfrac{1}{2} + At\tfrac{1}{3}$$

erit nunc

$$\alpha = 2\,At\tfrac{1}{3} + At\tfrac{1}{7},$$

atque α iterum his duabus ſeriebus coniunctis aequabitur

$$+\frac{2}{1.3} - \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} - \frac{2}{7.3^7} + \text{etc.}$$

$$+\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \frac{1}{7.7^7} + \text{etc.}$$

quae

quae multo magis conuergunt, quam priores. Commodiſſima autem forte reſolutio erit

$$\alpha = 4 \mathrm{A}t\tfrac{1}{5} - \mathrm{A}t\tfrac{1}{239}$$

vel

$$\alpha = 4 \mathrm{A}t\tfrac{1}{5} - \mathrm{A}t\tfrac{1}{70} + \mathrm{A}t\tfrac{1}{99},$$

quippe qui arcus ope ſerierum maxime conuergentium definiri poſſunt. Sed quisque, cui lubuerit huiusmodi calculum ſuſcipere, facile ſibi commodiſſimam reſolutionem eliget.

§ 15. Poſſunt quoque aliae ſeries, quibus etiam arcus ex data tangente definitur, non minori ſucceſſu vſurpari, ſi ita viſum fuerit; ſeries autem hae, quae commode in vſum vocari poterunt, ſunt ſequentes praecipue.

$$\mathrm{A}t.\ \frac{p}{p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{2}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} - \frac{2}{9p^9} - \frac{1}{11p^{11}} + \text{etc.}$$

$$\mathrm{A}t.\ \frac{2p}{2p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3.2p^3} - \frac{1}{5.2^2.p^5} - \frac{1}{7.2^3p^7} + \frac{1}{9.2^4p^9} + \text{etc.}$$

$$\mathrm{A}t.\ \frac{3p}{3p^2-1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{5.3^2.p^5} + \frac{1}{7.3^3.p^7} - \frac{1}{11.3^5.p^{11}} + \frac{1}{13.3^6.p^{13}} - \text{etc.}$$

$$\mathrm{A}t.\ \frac{3p(pp-1)}{p^4-4pp+1} = \frac{3}{1.p} + \frac{3}{5.p^5} - \frac{3}{7.p^7} - \frac{3}{11.p^{11}} + \frac{3}{13.p^{13}} + \text{etc.}$$

Ex hac vltima ſerie eſt ponendo $p = 2$

$$\mathrm{A}t\,18 = 3\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} - \frac{1}{11.2^{11}} + \frac{1}{13.2^{13}} + \frac{1}{17.2^{17}} - \text{etc.}\right)$$

ad quem arcum ſi addatur $\mathrm{A}t\frac{1}{18}$, qui per vulgarem ſeriem facile exhibetur, prodit quarta peripheriae pars ſeu 2α. Simili modo ex ſerie ſecunda prodit $2\alpha =$

$$1 + \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.2^2} - \frac{1}{7.2^3} + \frac{1}{9.2^4} + \frac{1}{11.2^5} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \text{etc.}$$

§. 16,

§. 16. Quando autem in hoc negotio arcus fuerit inueniendus per ſeriem Leibnitianam, cuius tangens quidem ſit parua, ſed eius numerator non $= 1$, tum difficulter ſingulos ſeriei terminos euoluere liceret. His igitur caſibus conueniet arcum in duos alios reſoluere, quorum tangentes pro numeratore habeant vnitatem, id quod ſaepius fieri poteſt. Sit enim arcus inueſtigandus cuius tangens eſt $\frac{a}{b}$; ponatur $A t \frac{a}{b} = A t \frac{1}{m} + A t \frac{1}{n}$; eritque $\frac{m+n}{mn-1} = \frac{a}{b}$. Hinc fiet $(ma-b)(na-b) = a^2 + b^2$. Quamobrem inquirendum eſt, vtrum $a^2 + b^2$ in duos factores reſolui poſſit, quorum vterque denominatore b auctus per numeratorem a fiat diuiſibilis. Quod cum acciderit erunt quoti ex iſtis diuiſionibus orti valores pro m et n ſubſtituendi. Sic ſi quaerendus ſit arcus cuius tangens $= \frac{7}{9}$, quia eſt $7^2 + 9^2 = 130 = 5 . 26$ erunt valores ipſorum m et n hi $\frac{5+9}{7}$ et $\frac{26+9}{7}$ ſeu 2 et 5. Erit itaque $A t \frac{7}{9} = A t \frac{1}{2} + A t \frac{1}{5}$, vnde non difficulter $A t \frac{7}{9}$ reperitur.

§. 17. Saepius autem cum ſumma quadratorum non habet factores huius indolis, arcus in duos eiusmodi alios arcus reſolui nequit. His ergo caſibus propoſitus arcus in tres pluresue arcus reſolui debebit, quod ſequenti modo fiet. Sit propoſitus arcus cuius tangens eſt $\frac{x}{a}$ erit

$$A t \frac{x}{y} = A t \frac{ax-y}{ay+x} + A t \frac{1}{b}.$$

Si nunc in integris valor pro a inueniri nequeat, vt $ax - y$ fiat diuiſor ipſius $ay + x$, tum ſaltem in fractis quaeratur, et pro $A t \frac{1}{a}$ ponatur $A t \frac{b-a}{ab+1} + A t \frac{1}{b}$; denuoque diſpiciatur, vtrum detur numerus integer, qui pro b ſub-

 ſtitu-

ſtitutus reddat $b-a$ diuiſorem ipſius $ab+1$. Ita ergo pergendo ſequentes orientur formulae

I. $At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{1}{a}$

II. $At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{b-a}{ab+1}+At\frac{1}{b}$

III. $At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{b-a}{ab+1}+At\frac{c-b}{bc+1}+At\frac{1}{c}$

IV. $At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{b-a}{ab+1}+At\frac{c-b}{bc+1}+At\frac{d-c}{cd+1}+At\frac{1}{d}$.

§. 18. Si ergo a, b, c, d, etc. fuerit progreſſio quaecunque numerorum tandem in infinitum creſcentium, habebimus ſeriem arcuum infinitam, qui omnes ſimul ſumti dato arcui aequantur. Erit ſcilicet

$At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{b-a}{ab+1}+At\frac{c-b}{bc+1}+At\frac{d-c}{cd+1}+At\frac{e-d}{de+1}+$ etc.

Neceſſe autem eſt vt progreſſionis a, b, c, d, etc. terminus infiniteſimus ſit infinite magnus, quia arcus cuius ille cotangens eſt negligitur, hinc non contemnendae ſequuntur ſeries arcuum ſummabiles; vt poſito $\frac{x}{y}=1$ et pro a, b, c, d, etc. ſerie numerorum imparium 3, 5, 7, 9 etc. habebitur

$$At\,1=At\tfrac{1}{2}+At\tfrac{1}{8}+At\tfrac{1}{18}+At\tfrac{1}{32}+\text{ etc.}$$

in qua tangentium denominatores ſunt dupla quadrata numerorum naturalium. Simili modo erit

$$At\,1=At\tfrac{1}{3}+At\tfrac{1}{7}+At\tfrac{1}{13}+At\tfrac{1}{21}+At\tfrac{1}{31}\text{ etc.}$$

§. 19. Coronidis loco theorema non inelegans ſubiungam, quod ad naturam circuli penitius inſpiciendam inſeruire poteſt. In circulo ſcilicet cuius radius ſeu ſinus totus $=1$, eſt arcus quicunque A aequalis huic valori

ſin. A

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } \tfrac{1}{2}A.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{4}A.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{8}A.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{16}A.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{32}A.\ \text{etc.}}$$

Vel quod perinde eſt per ſecantes erit

$$A = \text{ſin. } A.\ \text{ſec. } \tfrac{1}{2}A.\ \text{ſec. } \tfrac{1}{4}A.\ \text{ſec. } \tfrac{1}{8}A.\ \text{ſec. } \tfrac{1}{16}A.\ \text{etc.}$$

quae expreſſio commode adhiberi poteſt ad logarithmum cuiusuis arcus ex datis logarithmis ſinuum et ſecantium inueniendum: erit ſcilicet

$$\text{l. } A = \text{l. ſin. } A + \text{l. ſec. } \tfrac{1}{2}A + \text{l. ſec. } \tfrac{1}{4}A + \text{l. ſec. } \tfrac{1}{8}A + \text{etc.}$$

vbi notandum, ſi tabula logarithmorum conſueta vtamur, a quouis logarithmo logarithmum ſinus totius auferri debere. Sic ſi logarithmus arcus 1 gradus quaeratur erit

log. ſin.	1°	=	(−2), 2418553
log. ſec.	$30'$	=	0, 0000165
log. ſec.	$15'$	=	0, 0000041
log. ſec.	$7\tfrac{1}{2}'$	=	0, 0000010
log. ſec.	$3\tfrac{3}{4}'$	=	0, 0000003
log. Arc.	1°	=	(−2), 2418762

log. 180	=	2, 2552725
l. A. 1°	=	(−2), 2418762
l. A. 180°	=	0, 4971487

cui logarithmo reſpondet numerus 3, 14159.

§. 20. Demonſtratio huius theorematis pendet a mutua relatione ſinuum et coſinuum angulorum, qui inter ſe rationem duplam tenent. Cum enim ſinus anguli cuiusque

iusque in ſuum coſinum multiplicatus producat ſemiſſim ſinus anguli dupli, aequabitur ſinus cuiusuis anguli per coſinum dimidii anguli diuiſus duplo ſinus anguli dimidii ita erit

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſin. } \frac{1}{2} A} = 2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} A.$$

Simili ratione cum ſit

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } \frac{1}{2} A. \text{ coſ. } \frac{1}{4} A} = \frac{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} A}{\text{coſin. } \frac{1}{4} A}$$

erit per eandem proprietatem

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſin. } \frac{1}{2} A. \text{ coſ. } \frac{1}{4} A} = 4 \text{ ſin. } \tfrac{1}{4} A.$$

Atque vlterius pergendo habebitur

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſin. } \frac{1}{2} A. \text{ coſin. } \frac{1}{4} A. \text{ coſin. } \frac{1}{8} A} = 8 \text{ ſin. } \tfrac{1}{8} A.$$

Ex quibus concluditur, ſi progreſſio coſinuum in infinitum continuetur, fore

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } \frac{1}{2} A. \text{ coſ. } \frac{1}{4} A. \text{ coſ. } \frac{1}{8} A. \text{ coſ. } \frac{1}{16} A \text{ etc.}} = \infty \text{ ſin. } \tfrac{1}{\infty} A.$$

$=$ arcui ipſi A. Q. E. D.

CLAS-

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

DE
THERMOMETRIS
DISSERTATIO EXPERIMENTALIS,

AVTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

CVm inter ſolida et fluida nullum hucusque corpus inuentum ſit, quod non quaquauerſum ab igne et calore extendatur, veluti Experimenta *Celeb. Muſſchenbroekii in Tentam. Academicorum Florentinorum, Parte II. pag.* 12. *ſeqq.* abunde et iucunde docent: adhibentur optimo ſucceſſu hodie a Phyſicis, pro determinando aliquo caloris gradu, Inſtrumenta non ſine multo artificio ſic adaptata, vt minimam quamuis fluidi incluſi rarefactionem vel condenſationem admodum ſenſibilem, et oculis diſtinguendam, reddant. Atque quidem cunctorum fluidorum mercurius viuus huic ſcopo obtinendo ab omnibus merito creditur eſſe aptiſſimus, quia, ſi purus fuerit, aeque dilatabilis non ſolum eſt, ſed etiam manet, nulliſque obnoxius eſt mutationibus, quibus alia fluida premuntur; praeſertim vero etiam, quia non niſi magno calore ad ebullitionem cogitur, adeoque, vi huius proprietatis, intenſo alicuius caloris gradui cognoſcendo inſeruire poteſt.

§. 2.

§. 2. Liberata ſic, mercurii auxilio, iamdiu ſunt Thermometra noſtra pluribus vitiis, quibus *Drebbeliana*, et quae in horum loci ſucceſſerunt, *Florentina*, laborare non ſine taedio obſeruata fuerunt. Non tamen ex omni parte adhuc ſunt perfecta. Nondum enim in iis incommoda, quae mox enarrabo, fuerunt ſublata. Primo, vitrum ipſum, quo mercurius continetur, a calore extenſionem, a frigore contractionem, patitur; quo fit, vt interior cauitas modo amplior, modo anguſtior euadat, id quod impedit, vt verae aſcenſuum aut deſcenſuum fili mercurialis quantitates obſeruari queant. Secundo, nondum confirmata, et extra omnem formidinem erroris poſita mihi videtur proportio, quam tenet volumen maſſae eiusdem mercurialis aquae feruidae, et aquae iamiam in glaciem abeunti, impoſitae. Adhibentur enim optime hi duo caloris gradus pro norma Thermometrorum, cum ille, ſaltim in vna eademque aqua, ſit fere conſtans, nec niſi modicae alicui variationi obnoxius; hic vero aquae inhaereat, cum ipſa eſt in ſtatu voluminis ſui medio; dum nimirum remittente ebullitione ſenſim contrahitur, vsque ad ſtatum incipiendae gelationis; quo initium capiente quieſcit quaſi aqua, et poſtea dum augetur frigus, denuo extenditur. Qualis autem ſit variatio caloris in aqua ebulliente, didici duobus Experimentis hunc in finem inſtitutis. Nempe hoc anno 1738, Februarii 15, cum Barometrum teneret altitudinem magnam, ſcilicet 30$\frac{34}{105}$ pollicum Londinenſ. duodecimal. obſeruaui, Thermometrum aquae ebullienti per ſemihorium inſiſtens, mercurium tandem conſtanter fixum tenuiſſe ad 3039 gradus diuiſionis arbitrarie factae; cum deinde

deinde Februarii 22, Barometrum tandem deſcendiſſet ad 28 $\frac{35}{100}$ pollices, vidi calorem aquae ebullientis Thermometrum non altius coëgiſſe, quam ad gradus 3022, quae differentia horum graduum 17, efficit $\frac{14}{1000}$ pedis Rhenani, quaeque ideo valde eſt exigua, non tamen contemnenda, ſi accuratiores deſiderentur obſeruationes. Inueni enim, factis dimenſionibus mercurii in vtroque ſtatu aquae feruentis, habuiſſe volumina rationem inter ſe, vti 50439 ad 50425, in modo memoratis duabus altitudinibus Barometri, vel quam proxime, vti 10000 ad 9997. Tertium denique incommodum etiam hoc eſt, quod Thermometra corporum fluidorum tantum calori examinando apta ſint, non vero ſolidorum; quamuis hoc ex aliqua parte ſublatum ſit ingenioſiſſimis inuentis *Cel. Muſſchenbroekii*, qui Pyrometro ſuo, et *b. Leutmanni* noſtri, qui alia machina, ſolidorum extenſiones, a calore oriundas, metiri inſtituerunt. *Vid. Tentam. Acad. Florent. l. c.* et *Commentarii noſtrae Academiae Tomo IV. pag.* 216. Quae autem, ad primum et ſecundum dictorum incommodorum leuanda, Experimenta me docuerint, praeſenti ſcripto ſum expoſiturus.

§. 3. Quamuis non difficile ſit, datis, capacitate cylindri amplioris in Thermometri imo, et capacitate tubuli annexi, adhibito calculo, inuenire, quantum dilatatus ſit mercurius in quocunque gradu haerens: optime tamen ipſa diuiſio graduum in latere adſcriptorum ſic inſtituitur, vt numerus adſcriptus ſtatim monſtret, quanta ſui, per calorem aquae ebullientis extenſi, voluminis parte, mercurius in quolibet aëris ſtatu ſit condenſatus, vt moleſtia calculi et menſurarum euitetur; qua ratione

Clariſſ. De L'Isle diuiſionem Thermometrorum adornare ſolet; in quibus, ſi ex. gr. altitudo mercurii monſtret gradum 150, id indicat, mercurium in praeſenti calore condenſatum eſſe parte $\frac{150}{10033}$ vel $\frac{3}{205}$ voluminis eius, quod tenuit in aqua ebulliente. Sed pro hac diuiſione abſoluenda opus eſt, vt accuratiſſime ſciatur ratio voluminum, quam eadem maſſa mercurii tenet in aqua ebulliente, et aqua gelaſcente, vt vtrique huic gradui, pro norma aſſumtis, legitimus numerus adſcribi queat, ita vt Thermometra haec ſint vniuerſalia. Haec ratio in Thermometris modo dictis ſtabilita eſt 200:197, et quam, vt confirmare poſſim, ſequentia cepi experimenta.

§. 4. Globulum parari curaui aureum, vt nempe in mercurio ſubmergeretur, cuius diameter eſt $\frac{48}{1000}$ pedis Rhenani; ne vero a mercurio, calido praeſertim, exedatur, effeci vt diligentiſſime vernice obduceretur. Atque tum Ianuarii 31. anni 1738, cum frigus forte regnaret, per bilancem accuratiſſime inquiſiui huius globuli, vna cum annexo filo ſerico tenuiſſimo, pondus, quod erat 464 granorum. Poſtea expoſui libero aeri vas amplum aqua repletum, cui aquae vaſculum mercurio bene purgato plenum inſiſtebat. In vaſe amplo poſt quadrantem horae aqua cepit congelari; quo ipſo momento, cum iudicarem mercurium eundem cum aqua gelaſcente frigoris gradum concepiſſe, globuli aurei pondus reſpectiuum, quod nempe, dum mercurio immerſus erat, ſuperſtes ipſi adhuc manebat, ſolicite examinaui, et deprehendi 88 $\frac{3}{8}$ gran. Idem Experimentum repetii Februarii 2, cum frigus adhuc intenſius eſſet quam prius, inuenique globuli aurei cum filis annexis pondus eſſe 461 $\frac{3}{4}$ gran. reſpectiuum

vero

vero tantum 86. gran. Denique Februarii 3, cum frigus paulo miteſceret, impoſui idem vaſculum mercurio plenum aquae ebullienti per aliquod tempus, cumque pondus globuli aurei abſolutum eſſet adhuc $461\frac{3}{4}$ gran. reſpectiuum erat $91\frac{3}{4}$ gran. Sed in extracto globulo obſeruaui, vernicem hinc et inde ab aquae calore fuiſſe ſolutum, et aurum albis maculis inquinatum; quae, cum vererer vt volumen globuli vel in ſequentem ſolum diem idem ſit manſurum, reiterationem huius Experimenti impediuerunt. Sunt autem grana memorata non Medica, ſed ad libram Hollandicam adaptata, ita quidem, vt 160. grana mihi adhibita efficiant 167 Grana Medica.

§. 5. Vt igitur nunc ad vſum horum Experimentorum Thermometricorum accedam, neceſſe eſt, vt antea totum negotium ad ſymbola generalia redigam. Sit itaque maſſae mercurialis Thermometro incluſae volumen, quod in aqua ebulliente acquirit, $=V$, atque reſpondens denſitas $=D$; eiusdem maſſae, in alio quocunque minori caloris gradu locatae, volumen, priori minus, ſit $=v$, denſitas vero congruens $=d$; ſitque Thermometrum ita in gradus diuidendum, vt numeri adſcripti condenſationem voluminis per aquam ebullientem acquiſiti, in partibus decies milleſimis dicti voluminis, denotent, atque talis aliquis numerus adſcriptus ſit $=\frac{n}{10000}$. Et, quoniam condenſatio eſt reſpectus differentiae voluminum ad volumen maius conſtans, erit ea $=\frac{V-v}{V}$; quam ergo, cum numerus adſcriptus denotare debeat, erit $\frac{V-v}{V}=\frac{n}{10000}$, vnde fit $n=10000-\frac{10000\,v}{V}$, et conſequenter $V:v=10000:10000-n$; vel etiam, quia in eadem maſſa denſitates

ſunt inuerſe vti volumina, erit $D:d = v:V$, adeoque ex his $n = 10000 - \frac{10000\,D}{d}$. Sin itaque, Thermometro aquae iamiam gelaſcenti impoſito, altitudini mercurii gradus legitimus ſit adſcribendus, opus eſt, vt ſciatur ratio $v:V$, hoc eſt, voluminis mercurialis in aqua iamiam gelaſcente, et in aqua ebulliente. Statuit hunc numerum n *Clariſſ. De L'Isle* conglaciationi aquae conuenientem $= 150$, ita vt in tali caloris gradu mercurius condenſatus ſit parte $\frac{3}{200}$ voluminis ſui per aquam ebullientem extenſi. Erit igitur poſito $n = 150$, $V:v = 10000:9850 = 200:197$, vti ſupra iam innui §. 3. Videamus ergo, quaenam ex his experimentis ſit ratio inter V et v, et quisnam exinde prodeat numerus n, aſdcribendus loco mercurii, quem occupat, dum Thermometrum aquae gelaſcenti eſt impoſitum.

§. 6. Cum in his Experimentis dentur tria pondera voluminis mercurialis eiusdem, aequalis nempe ſphaerulae aureae, et, poſito volumine eodem, pondera ſint vti denſitates corporum: poterimus ſtatim eruere denſitatem mercurii aquae gelaſcenti et aquae ebullienti impoſiti; ſunt enim hae denſitates vti iactura ponderis, quam ſphaerula aurea in quolibet caſu paſſa eſt. Quare erit per Experim. I. et III. $D:d = 370:375\frac{5}{8} = 2960:3005$, quae ratio ſubſtituta in formula ipſius $n = 10000 - \frac{10000\,D}{d}$ praebet $n = 149\frac{2255}{3005}$. Per Exper. vero II. et III. habebitur $D:d = 370 \cdot 375\frac{3}{4} = 1480:1503$, quae ratio denuo ſubſtituta in formula ipſius n, praebet $n = 153\frac{41}{1503}$; qui quidem duo numeri inuenti ſatis bene congruunt pro ſubtilitate huius Experimenti; et ſi ad eorum medium, tan-

tanquam ad aſylum in rebus dubiis conſuetiſſimum, confugiamus, erit $n = 151\frac{1}{3}$ quam proxime, pro quo, maioris commoditatis gratia, in diuidenda ſcala Thermometri, aſſumi poterit, ſine errore conſiderabili, $n = 150$.

§. 7. Patet vero, ex allegato calculo, Experimenta hoc modo inſtituta ſumme ſubtilia eſſe, et exactitudinem requirere haud vulgarem. Nam in primo Experimento eſt $d = 375\frac{5}{8}$, in ſecundo autem eſt $d = 375\frac{3}{4}$, quae duo pondera non niſi $\frac{1}{8}$ parte grani differunt; producunt tamen differentiam in ſcala Thermometri $3\frac{1}{3}$ graduum. Quamuis autem bilance vſus fuerim, quae lancibus ſolis onerata exactiſſimum tenebat aequilibrium, et pondera omnia indicata bis, in vtramque lancem nempe ſucceſſiue ea imponendo, examinauerim, atque ſic, ſumendo medium proportionale ponderum in vtraque lance inuentorum, omni diligentia vſus fuerim: vix tamen potui euitare errorem tam exiguum, qualis eſt $\frac{1}{8}$ vnius grani. Neque vero melior Experimenti huius ſucceſſus ſperandus eſt, ſi adhibeatur ſphaera aurea maioris diametri, niſi addatur ſimul Bilanx omnium quae poſſibiles ſunt optima et ſelectiſſima.

§. 8. Alteram difficultatem, quae in contractione et dilatatione vitri conſiſtit, ſequenti modo, ſi non penitus tolli, multum tamen leuari poſſe puto. Conſtat Experimentis quotidianis, fluidum Thermometro alicui incluſum, ſubito et per ſaltum deſcendere primum, ſi aquae feruenti immergatur Inſtrumentum, et poſtea demum, dum calorem aquae feruentis concipit, aſcendere. Vocarunt hunc ſubitaneum deſcenſum in aqua feruida, et eundem ſubitaneum aſcenſum in aqua gelida, ſaltum Immer-

 ſionis,

ſionis, Academici Florentini. Spatium vero, per quod fit hic ſaltus Immerſionis, et quod vocabo Spatium Immerſionis, haud adeo difficulter in vtroque caſu Experimentis definiri poteſt. Igitur ad id quam maxime attendendum erit pro determinanda ratione voluminum mercurii in aqua feruida et gelaſcente. Eſt enim extra omne dubium poſitum, quod ſaltus hic debeatur ſubitaneae dilatationi et contractioni voluminis in vitro, adeoque ſpatium immerſionis pro menſura variationis in vtroque Tabula X. Figura I. volumine poſſe aſſumi. Ponamus igitur Thermometrum mercurio repletum ED; immergatur illud primo aquae feruenti, obſeruari poterit ſpatium immerſionis, vi cuius, cum mercurius apparenter eſt in altitudine CA, ſi cylindrus CD non fuiſſet dilatatus à calore, teneret altitudinem C*a*. Immergatur deinde idem Thermometrum aquae gelaſcenti; obſeruari rurſus poterit ſpatium Immerſionis, vi cuius, cum mercurius apparenter eſt in altitudine CB, ſi cylindrus CD non fuiſſet contractus a frigore, teneret altitudinem C*b*. Poſitis igitur volumine cylindri CD, quod in äere libero habet, $= f^3$, area ſectionis AE aut $BF = a^2$, denſitate mercurii in aqua feruenti $= D$, denſitate autem mercurii in aqua gelaſcente $= d$; erit ob pondus mercurii in vtroque ſtatu idem, aequatio haec: $(f^3 + a^2 . Ca)D = (f^3 + a^2 . Cb)d$, vnde fit $D : d = f^3 + a^2 . Cb : f^3 + a^2 . Ca = f^3 + a^2 . (CB - Bb) : f^3 + a^2 . (CA + Aa)$; poterit ergo inueniri ex obſeruatis altitudinibus apparentibus CB et CA, ſpatiis immerſionum A*a* et B*b*, et dato volumine Cylindri CD, ratio denſitatum non quidem adhuc exactiſſima, ſed ſaltim multo exactior, quam ſi ſolae altitudines apparentes CA et CB obſeruentur.

OB-

OBSERVATIONES ANATOMICAE AD HISTORIAM ET ACTIONEM MVSCVLORVM LABIORVM, OSSIS HYOIDIS, FAVCIVM, LINGVAE, LARYNGIS PERTINENTES.

AVCTORE
Joſia Weitbrecht.

§. I.

MVſculum quadratum Colli, vulgo *platyſma myoides* dictum, quem non ſine gloriae captatione primus in ſimia detexit *Galenus* (1), inter buccarum et labrorum muſculos retulerunt veteres Anatomici; quippe quem ita deſcribebant, ac ſi e vertebris, ſcapulis et clauiculis oriretur, atque in buccarum regione circa labiorum angulos terminaretur. *Arantius* (2) autem poſtquam animaduertiſſet, hunc muſculum maxillae inferiori adnaſci, muſculorum iſtud os mouentium ordini adſcripſit. Inde factum eſt, vt ſequentes Scriptores in diuerſa abierint. Aliqui enim, vt *Veslingius*, *Bartholinus*, veterum ſententiam quidem retinuerunt; adhaeſione ad maxillam non negata: aliqui autem, imo plurimi *Arantii* ſententiam amplexi hoc platysma omnino maxillae muſculis, tanquam *deductorem* adnumerarunt, conceſſa eiusdem expanſione ad labia vsque. Nouiſſime autem *Cel.* *Wins-* Tabula X. Figura II.

(1) de Adminiſtr. Anat. Cap. IV. (2) Obſeru. Anat. C. 30.

Winslowius (3) hoc officium illi rurſus ademit, et aliud ipſi attribuit; dum ope adhaeſionis ſuae ad maxillam integumenta colli *ſurſum* trahere arbitratur. Omnium poſtremo autem *Cel. Albinus* (4), num maxillae inſeruiat? difficile quidem dictu iudicauit, in aduerſam tamen partem inclinans. Putarem, *vtrumque* vſum concedi poſſe huic membranae muſculoſae, dummodo ad terminos eius, terminorumque ſtatum fixum attenderimus. Dum enim Veteres eam circa ſedem oſſium pectoris, clauicularum, ſcapularum, cuti cohaerere tradiderunt, in eo quidem falſi ſunt, et omnino aſſentiendum *Santorino* (5) eſt, qui cutem inter et platysma *ſtratum adipoſum* interiacere recte docuit: attamen, cum tota fere fibrarum planities exterior latera maxillae tranſcendat, ac verſus laborum angulum proiiciatur, qui terminus multo mobilior eſt, quam circa pectus; *motui lab. orum* inſeruire, non ſine ratione Veteres ſtatuerunt. Porro, ex ſola quidem cohaeſione fibrarum interiorum (qualem *Winslowius* recte deſcribit) cum maxilla, concludere non licet, illas ad oſſis huius depreſſionem facere. Maxilla enim inferiore ad ſuperiorem appreſſa iſtae fibrae terminum fixum nanciſcuntur; vnde illa actio neceſſario oritur, quam *Winslowius* in medium protulit. At vero, quando muſculi maxillam eleuantes agere ceſſarunt: nulla ratio ſupereſt, quare platysma ad illam *deprimendam* non concurrat; quippe maxilla, quae vel ſolo proprio pondere decidit, motum liberrimum habet, platysma autem in adipoſa tunica ſatis pertinaciter innaſcitur.

(3) Traité des Muſcles §. 749. et 1126. ſeqq. (4) Hiſtor. Muſc. hom. L. III. C. XXXV. (5) Obſeru. Anat. Cap. I. §. XXXIII.

§. 2.

II. In deſcribendis *labiorum muſculis* omnem laudem promeruit diligentia *Santorini*; cui vero *Cel. Albinus*, ſi non anteferendus, certe neutiquam poſtponendus. Quamuis enim nulla fere ſit facies, quae cum altera perfecte conueniat: *illius* tamen icones, et *amborum* commentarii inquiſitionibus noſtris plurimam partem reſpondent. Fatendum tamen mihi eſt, curuaturam (6) ſuperiorem ſecundi ordinis fibrarum illarum, quae labrum ſuperius compingunt, numquam adeo diſtinctam apparuiſſe; ita, vt partim *Waltheriana* (7) *correctio* placeat, partim non male actum videatur, ſi non ſolum *ordo* (8) *ſecundus*, vti *Albinus* (9) fecit, ſed et *tertius*, quem idem Cel. Autor *naſalem labii ſuperioris* (1) vocat, cum *Winslowio* (2) pro vno *muſculo ſemi orbiculari acceſſorio* (*ſurdemi-orbiculaire*) habeatur.

III. *cowperi* (3) *conſtrictor alae naſi*, vel *inciſorius minor ſuperior*, omnino *duplex* eſt, hiatu inter vtrumque relicto, qui *philtro* reſpondet. Quem quamuis *Euſtachius* in contractiorem lacertum coegiſſe videatur, non tamen vnicum, vti *Santorinus* (4) putat, ſed *duos* diſtinctos muſculos, dextrum in fig I. ſiniſtrum in fig. II. Tabulae XLI. delineauit. Hi vero muſculi labia non niſi per accidens deprimunt, quatenus nimium illa cum narium alis cohaerent. Hinc recte a *Cowpero* et *Albino* (5) ad ſolas nares referuntur, *conſtrictorum* vel *de-*

(6) Santorini C I. §. XIX. Tab. I. lit. h. (7) Anatome tener. muſc. repetit. Tab. I. lit. h. (8) Santorini Tab. I. lit. I. C. I. §. XX. (9) L. III. C. XVII. (1) L. III. C. XV. (2) Traite de la tète. §. 555. (3) Myotom. reform. 172.. Tab. XXV. fig. VI. nr. 37. (4) C. I. §. XVIII. (5) L. III. C. XVIII.

preſſorum nomine; quippe deprimendo alas narium illas etiam ſimul conſtringis.

IV. Circa *eleuatores labii inferioris proprios duo* potiſſimum notanda habeo: primo, illos muſculos, quos pro talibus venditat (6) *Santorinus*, quosque *leuatores menti* (7) *Albinus* vocat, eleuatorum officio fungi neutiquam poſſe; hi enim muſculi multo humilius maxillae adhaereſcunt quam labio, inde potius *labium* deprimunt ac verſus maxillam adducunt; quod et illorum incuruatio et congreſſus ita perſuadet. Secundo: iſtud par confundi non debere cum *eleuatore labii inferioris proprio* (8) *Cowperi*. Videlicet ſoluto a gingiuis labio deprehendes iacere aliud par muſculorum longitudinale, rectum, craſſiusculum, duas tresue lineas latum, infra alueolos dentium inciſoriorum adnatum, et directe in menti carnem turgidam exporrectum, cuius ope mentum quadantenus eleuari poſſe mihi viſum eſt, vnde *hos* potius, quam illos leuatores menti non inepte vocare licuiſſet. Sunt ergo *eleuatores Santorini* et *Albini* a *Cowperianis* longe *diuerſi*. *Illi* enim vtrinque circa alueolum dentis canini; *hi* infra alueolos inciſorum oriuntur: *Illi* incuruo inceſſu congrediuntur in labio; *hi* recta in menti carnem demittuntur: *illos Cowperus* Tab. XXXI. pro interna parte depreſſoris labii inferioris vulgo quadrati dicti, habere, et numero 25. indicare viſus eſt; *hos* in eadem figura numero 26. diſtinctiſſime repraeſentauit. Laudandus igitur eſt Dexterrimus *Heiſterus* (9), qui ſolus hunc *eleuatorem* verum *Cowperi*, neglecto altero reſtituit.

V.

(6) C. I. §. XXIX. (7) L. III. C. XIX. (8) Tab. XXXI. nr. 26.
(9) Comp. Anat. §. 319.

V. Faſciculos laterales, ſiue acceſſorios ad orbicularem inferiores *Winslowii* (1) et (2) *Albini*, quos Inuentori *Santorino* (3) *inferioris labri productores* nominare placuit, ad contrahenda labii latera ſedemque mediam in priora producendam non ſolum ſed et corrugandam cum ſemiorbiculari conſpirare exiſtimo; idque eo magis, quod hic tanta latitudine non diffundatur, quanta in ſemiorbiculari labri ſuperioris obſeruari ſolet.

VI. Muſculi *digaſtrici* corpus poſticum ſemper vnicum eſt et ſimplex; ſed poſtquam *tendo intermedius* angulum oſſis hyoidis reliquit, ſaepiſſime in *duos* diſtinctos ventres iterum dirimitur, interdum in vno tantum latere, interdum in ambobus ſimul. Dico *ſaepiſſime*; vix enim vllus muſculus alius eſt, qui tam frequentes variationes admittat. Meminit earum quoque (4) Cel. *Albinus*. Si vtrinque duplices ſunt: bini interiores acceſſorii vel ita congrediuntur, vt extremitatibus ſuis in ipſam menti mediam ſedem inſerantur; vel antequam ad mentum acceſſerunt, circa medium muſculi mylohyoidis non ſine mutua confuſione decuſſantur, ita, vt, qui a dextris incedit, in latere menti ſiniſtro, et qui a ſiniſtris, in dextro latere infigatur, ambo autem ſub ventrium principalium extremitatibus abſcondantur. *Digaſtricus* ſtylohyoidem *rariſſime* non perforat. Perforatio autem fit longe ab oſſis hyoidis angulo. Relicto hoc demum traiectu tendo medius ad dictum hunc angulum accedit, ibique per commiſſuram membranaceam firmatus ad mentem denique reflectitur. Haec commiſſura quamuis ſaepe nil ſit niſi membrana tendini pertinaciter adhae-

 rens

(1) §. 596. (2) L. III. C. XVII. (3) C. I. §. XXX. (4) L. III. C. XLII.

rens et accreta, a *Cowpero* Tab. XXIII. et XXXI. optime expreſſa: aliquoties tamen et annularem ſtructuram deprehendi, quae tendini tamquam trochleam traiicienti motum reciprocum liberrimum conceſſit. Quemadmodum vero hic *muſculus*, fixa per eleuatores ſuos maxilla, *os hyoides* cum partibus adhaerentibus, in deglutitione potenter *eleuat*, quem vſum *Cel. Winslowius* ſapientiſſime introduxit: ita etiam idem hic muſculus viciſſim maxillam, laxatis eleuatoribus, et oſſe hyoide per ſterno- et coraco-hyoides deducto et fixo, multo commodius deprimit, quam ſi in angulum poſteriorem infixus fuiſſet. Ore enim clauſo maxillae proceſſus condyloides in cauitate pone apophyſin zygomaticam reſidet. Quando autem os aperire velis, idem proceſſus ſitum mutat, et ope muſculi pterygoidis externi ſuper apophyſeos iſtius tuberculo verſus anteriora producitur; quod tuberculum, cum multo *demiſſius* poſitum ſit quam cauitas, neceſſario efficit, vt angulus maxillae poſterior inter aperiendum os aliquantum deſcendat. Quodſi igitur *digaſtricus* huic angulo inſertus fuiſſet: aut huius deſcenſui inter agendum quam maxime obſtitiſſet; aut illius exortus pone apophyſin maſtoidem et directio mutari debuiſſet. An autem et caput moueat, vti ingenioſiſſimo alicui Viro viſum eſt? id fieri quidem poſſe non negauerim; *quamuis certe huic officio paratus non ſit.*

VII. Sed quoniam ad os hyoides et deglutitionem peruentum eſt, non poſſum non paullo fuſius explicare inſignem *vtilitatem*, quem muſculi vicini in promouenda ſaliuae excretione ex *glandula whartoniana* praeſtant. Haec

Haec enim glandula muſculum mylohyoidem et digaſtricum, inſimulque maxillam et os hyoides interiacet, vt ab illis durante eorum actione et oſſe hyoide ad maxillam adducto blande prematur et ſaliua in ductum excretorium determinetur. Ductus autem ipſe dum e glandula egreditur, a vicinis partibus ſolutus non eſt, vti *ductus ſtenonianus*, ſed glandulae ſublingualis ſuperficiei incumbit; cuius membranae intexitur, et ſimul cum illa compreſſionem muſculi cerato-gloſſi deſuper, et mylohyoidis, qui inter vtramque glandulam profunde ſe inſinuat, inferne perpetuo experitur. Quemadmodum vero glandula ſublingualis cum maxillari arcte cohaeret, vt illa ſaepe pro cauda huius haberi poſſit: ita hunc ductum excretorium etiam in homine *pro ductu communi* ad vtramque glandulam pertinente habendum eſſe mihi videtur. Quamuis enim *oſcula* illa *excretoria*, quae *Cel. Heiſterus* (5) ad latera linguae iuxta monitum oculatiſſimi *Morgagni* (6) introducta delineauit, plane non negauerim: ſemper tamen ita mihi apparuere, ac ſi non e glandula illa ſublinguali prolongata, ſed *ab aliis* quibusdam glandulis *ſolitariis*, quales labiales eſſe ſolent, et quae iuxta latus linguae turgeſcentiam quandam, membrana in nonnullis obiectis *caudata* obtectam, efficiunt, prouenirent. Quam *opinionem* vlterius examinandam relinquo, facile illam deſerturus, vbi primum certiora vel propriis vel alienis disquiſitionibus edoctus fuero.

VIII. Muſculus *ſtylohyoides alter* frequentius adeſt, quam vulgo putatur; vnde non ſolum fides habenda (7)

Ii 3 *Cow-*

(5) Comp. An. Tab. VII. fig. 33. (6) Adu. Anat. VI. An. C.
(7) Cap. XIII. §. XLVI.

Cowpero, *Duglaſſio* (8) et *Santorino* (9) eſt, ſed et huius *deſcriptio* vt *genuina* et ſatis *conſtans* admittenda. Sed nec *Cowperus*, nec *Duglaſs*, nec *Santorinus* pro *detectoribus* primis haberi poſſe mihi videntur: putauerim enim, illum iam ab *Euſtachio* (1) delineatum eſſe. Recipiendus eſt igitur in poſterum vt *ordinarius*, in muſculorum cenſum, vti iam fecere *Duglaſſius* et *Albinus* (2). Plerumque ipſi corniculo oſſis hyoidis affixus eſt, vnde nomen ſtylo chondro-hyoides non ineptum. Tum vero ligamenti, quod vulgo ex proceſſu ſtyloide ad haec cornicula deducunt Anatomici, ne veſtigium quidem vllum apparet; vti in *hiſtoria* mea *ligamentorum* ampliter declaraui.

IX. Si qui ſunt *muſculi*, qui negotium faceſſunt proſectori alicui: hoc certe de *linguae*, *vuulae* et *pharyngis* muſculis dicendum eſt, quamuis non tam ipſa rerum multiplicitas, quam potius ambigua Auctorum fluctuatio miraque nominum confuſio hanc difficultatem pariat, quae fortaſſe nimia quoque ſubtilitate adaucta eſt. Incipiamus ab vuulae muſculis. Huius *duo paria* primus *Fallopius* (3) deſcripſit atque ad fauces retulit. Deſcripſit autem ita, vt verius quicquam dici vix poſſit. Atque hi ſunt illi bini, quos *Platerus* (4) par *gracile et latum* faucium; *Laurentius* (5) *primum et ſecundum* par faucium; *Spigelius* (6) et *Bauhinus* (7) *par dilatans* faucium *ſphenopharyngeum* et par *ſecundum* vocitauerunt; qui omnes in deſcriptione ſua *Fallopium* maximam partem fideliter ſequuti ſunt. Poſtquam vero circa tempora *Riolani* nomina

(8) Deſcriptio comparata muſculorum C. XII. §. 54. (9) C. VI. §. 20.
(1) Tab. XLI. fig. XI. (2) L. III. C. XLIV. (3) Obſeru. Anat.
(4) Tab. p. 76. (5) Andr. Laurentii Hiſtor. Anat. L. V. C. XIX.
(6) De H. C. fabrica L. IV. C. VI. (7) L. III. C. LXXXVI.

mina propria rebus imponendi mos inualuit, cum nominibus horum muſculorum etiam deſcriptiones mutatae ſunt. Vocati igitur a *Riolano* (8), et iuxta huius Viri autoritatem a *Bauhino* (9), *Veslingio* (1), *Dominico de Marchettis* (2) *pterygoſtaphylini externi et interni*, cum tamen ab his proceſſibus neutiquam oriantur. Muſculi enim externi vel et *ſuperioris pars altera* e radice apophyſeos ſpinoſae oſſis ſpenoidis, *altera* ex membrana tubae oritur; *haec* in ſpinam alae internae ſecundum longitudinem innaſcitur, *illa* circa corniculum reflectitur. Has duas partes vno nomine a figura deſumto, *circumflexus palati*, *Albinus* (3) comprehendit: *Winslowius* (4) autem duobus nominibus inſigniuit, dum partem *breuiorem pterygoſalpingeum*, *longiorem* vero *ſpheno-ſalpingo-ſtaphylinum* vocitauit. Qua ratione exiſtimationi *Valſaluae* (5) optime conſulitur, qui ab aliis notatus eſt, quod hunc muſculum vt nouum venditarit, id quod de altera breuiore parte omnino admitti poteſt. Neque etiam *Pteryſtaphylinus internus* ab inferna parte alae internae educitur, vti *Riolanus* vult; ſed, vt recte *Fallopius* docet a propinqua parte muſculi antecedentis, hoc eſt, circa apicem acutum ſeu apophyſin ſpinoſam oſſis ſphenoidis; quae regio ſeu vicinia nihil aliud eſt, quam portio oſſea oſſis petroſi, quae ad formandam tubam concurrit, cuius originis reſpectu *Valſalua* (6), *Santorinus* (7), *Winslowius* (8) huic muſculo *ſalpingo-* vel *petro-ſalpingo-ſtaphylini* nomen ſtrictius dederunt, cum *ſpheno-ſta-*

(8) Arthropogr. L. V. C. XIX. (9) L. III. C. LXXXIII. (1) Syntagm. C. XI (2) Anatomia C. XI. (3) L III C LXI (4) Traité de la tête §. 498 499. (5) Tract. de Aure C. I. §. XVIII. (6) C. II. §. XIX. (7) C. VII. §. XV. (8) l. c. §. 501.

noſtaphylinum Cowperi nimis generale eſſet. *Albinus* (9) autem ab officio ſuo *leuatorem palati mollis* vocauit. Ceterum inſertio horum binorum parium in vuulam omnino *cum quadam latitudine* accipienda eſt, ita, vt totum velum illud molle oſſibus palati continuum illo termino intelligatur. *Illud* par limbo oſſium *propius* eſt, *hoc* vero regionem *humiliorem* occupat. Vſum vero et officia adeo ſollicite et neruoſe *Albinus* excuſſit, vt ſuperaddi nihil poſſit.

X. *Pharyngoſtaphylinus Valſaluae* (1) et *thyroſtaphylinus*, ſeu *thyropalatinus Santorini* (2) omnino *vnus idemque* muſculus eſt, neque tot minutiae cum *Santorino* ſectandae. Aſſentior igitur cum *Winslowio* (3), tum *Albino* (4), qui vtrumque ſub nomine *palatopharyngei* quam optime deſcripſit.

XI. Muſculus *Ceratoſtaphylinus* a *Cel. Heiſtero* (5) detectus omnino vti *ſingularis* muſculus admitti debet. Oritur tenaci tendine ex alae interioris corniculo, et in velo palati cum inſertione pterygoſtaphylini externi eiusdem Auctoris commiſcetur. Mallem etiam ipſum nomen ab *Auctore* effictum retineri, quam cum pterygoſtaphylino inferiore *Winslowii* (6) commutari. Denique *palatoſtaphylinus Duglaſſii* (7), et *azygos Morgagni* (8) et *Albini* (9) nonniſi *vnus* muſculus ſunt, et falſo pro duobus diuerſis ab *Heiſtero* (1) venditantur. *Morgagnus* enim

(9) L. III. C. LX. (1) C. II. §. XIX. (2) C. VII. § XII. (3) l. c. §. 496. 497. (4) L. III. C. LVIII. (5) C A. not. 72. (6) l. c. §. 500. (7) l. c. §. 76. (8) Adu. An. I. n. 8. (9) L. III. C. LXII. (1) l. c. §. 326. n. 6. 7.

enim per *muſculos columellae* dicto loco non palatoſtaphylinum aliquem ſed *pharyngo-* et *thyreo-ſtaphylinos*, de quibus ante (X.), intellexerat.

XII. *Fallopii tertius faucium muſculus* eſt proprie omnis ille apparatus, quem vulgo hodie nominibus *Cephalo-ſalpingo-pterypo-mylo-hyo-chondro-ſyndesmo-thyreo-crico-pharyngeorum* indigitare ſolemus. Nuperrime autem *Albinus* (2), tot nomina non ſine ratione abhorrens, illum in *tres* portiones diuiſit, quarum *vna* a cartilaginibus laryngis orta ipſi eſt *conſtrictor pharyngis inferior*, *altera* ex oſſe hyoide educta *conſtrictor pharyngis medius tertia* denique a capite et vicina maxillarum et linguae regione deriuata *conſtrictor pharyngis ſuperior*. Sed omnem rem ab ouo repetamus. *Fallopii* deſcriptionem preſſe ſequitur *Platerus* (3). Sed *Laurentius* (4) in *duos* muſculos diuidit, dum partem *inferiorem*, quae cartilaginis ſcutiformis lateri adnaſcitur, a reliquis ad os hyodes accedentibus ſeparat, fibras autem *ad linguam properantes* plane negligit. Hae partes ſunt muſculi pharyngis *cephalopharyngeus* et *oeſophageus Riolani* (5), qui autem terminos primi non in oſſe hyoide ſed in ipſa pharyngis tunica ponens occaſionem dedit muſculos multiplicandi. *Riolanum Veslingius* (6) et *D. de Marchettis* (7) imitantur. *Spigelius* (8) et *Bauhinus* (9) nomina noua *Riolani* quidem retinuere; ſed totum *Fallopii* apparatum dixerunt *cephalopharyngeum*, *oeſophageum*

(2) L. III. C. LIV. LV. LVI. (3) In Tabulis. (4) l. c. L. V. C. XIX. par tertium et quartum faucium. (5) l. c. L. V C. XVIII (6) l. c. Cap. II Gulae par primum et ſphincter. (7) l. c. C. XI. par primum et quartum. (8) l. c. L. IV. C. VI. Faucium conſtringens par ſecundum et primum. (9) l. c. L. III. C. LXXXVI. par tertium et quintum.

geum tamquam *diuerſum* ab illo muſculum conſiderantes; cui opinioni ſine dubio anſam dedit, quod *Laurentius* inſertionem *Fallopianam* in originem et principium mutauerat, *hi* autem libros magis quam cadauera conſulerent. Poſtquam vero *Valſalua* (1) muſculos *hyopharyngeos* tamquam *nouum* par reſtituiſſet, inſequentium temporum Anatomici quidam, ad harum variarum denominationum hiſtoriam et ſcaturiginem non attendentes non ſolum *hos* receperunt, vtpote qui negari non poterant; ſed et *cephalopharyngeos* retinuerunt; qui ambo tamen reuera nihil aliud ſunt, quam illae ipſae fibrae, quas *ab ea parte, qua baſis capitis ceruici iungitur, deſcendere et in latera hyoidis inſeri* dixerat *Fallopius*. Singulares igitur cephalopharyngei ab hyopharyngeis diſtincti non dantur, ſiquidem et illi, qui diligentius circa hanc partem verſati ſunt, vt *Valſalua*, *Santorinus*, *Albinus* tale par non agnoſcunt; quem enim *Santorinus* (2) deſcribit, muſculus *azygos extraordinarius* eſt, et cum cephalopharyngeo neutiquam commiſcendus. Quod autem *Valſalua* (3) cephalopharyngeo *pharyngoſtaphylinum ſuum* ſubſtituere voluerit, in eo quidem *nimium* a tramite deflexit; ſi enim thyreo-pharyngo-ſtaphylinum (X.) in ſitu ſuo detegere velis, id facile impetrabis, ſi thyreopharyngeum a latere cartilaginis ſcutiformis ſolutum reflexeris.

XIII. *Hyopharyngeo Valſalua* (4) *duplicem* originem aſſignauit, cornua oſſis hyoidis, et appendices cartilagineas, ſeu graniformes. In qua re a *Santorino* (5) ani-

---

(1) l. 2. C. II §. XX. (2) l. c. C. VII. §. II. (3) l. c. C. II. §. XX. (4) l. c. C. II. §. XX. (5) l. c. C. VII. §. VIII.

nimaduerſus eſt, qui non duplicem, ſed vnam ſimplicem *continuam* inſertionem eſſe vult. Equidem fateor meas obſeruationes magis cum *Valſaluianis* conuenire, vnde *chondro-pharyngei* nomen non inepte a *Duglaſſio* (6) introductum eſt: putem vero, accuratiſſimum *Albinum* (7) omnium optime litem dirimere, qui iſtiusmodi varietates diligenter annotauit. Contra vero *Santorini* monitum *aliud* negligi non debet, quando eodem paragrapho dicit, „*fibras eas, quae in faſciculum collectae, ab ex*„*tremis cornubus deriuantur, in inferiorem pharyngis par*„*tem deſcendentes ſub thyropharyngeo produci*„. Videlicet *fibrae hyopharyngei* tam *ſurſum*, quam *recta* ad latus ac *deorſum* in pharyngem proiiciuntur, quas poſtremas fibrae thyreopharyngei proximae ſuperſcandunt.

XIV. Diximus ſupra (IX.), muſculorum faucium par primum *Fallopii* a *Spigelio* et *Bauhino ſphenopharyngeum* vocatum eſſe. Hoc vero par poſtquam ab aliis non ad fauces in genere, ſed ſpeciatim *ad vuulam* relatum eſt: mutato nomine vocabulum tamen non euanuit, ſed muſculis aliis impoſitum; non ſine magno et diſcentium et ſecantium incommodo. Ante omnia igitur notandum eſt, *aliud* par eſſe ſphenopharyngeum *Spigelii* et *Bauhini*; *aliud* ſphenopharyngeum *Riolani*; *aliud* denique ſphenopharyngeum *Veslingii* et *D. de Marchettis*. *Riolanus* (8) enim muſculos ſuos ab acuto apice oſſis ſphenoidis deducit; *Veslingius* (9) et *D. de Marchettis* (1) ex ſinu vel cauitate alarum. Porro *D. de Marchettis*

 mu-

(6) l. c. Cap. XV. 74. II. (7) l. c. Lib. III. Cap. LV. (8) l. c. L. V. Cap. XVIII. (9) l. c. Cap. III (1) l. c. Cap. XI.

muſculos ſuos noua voce, par *pterygopharyngeum* adpellauit, quae denominatio quum illorum origini magis conuenire videretur, poſtea a *Cowpero*, *Santorino* (2), *Duglaſſio* (3) adſcita eſt; neglecto interim ſphenopharyngeo *Riolani*. *Valſalua* (4) autem, cui et ipſi ſphenopharyngei nomen non arridebat, et hos pterygopharyngeos et mylopharyngeos a *Duglaſſio* (5) et *Santorino* (6) poſtmodum ſuperadditos omnes in vnam maſſam coniectos nouo *gloſſo-pharyngei* nomine fabrefacto indigitauit, cuius quidem deuiationis cauſſa ſine dubio exinde prouenit, non quod pterygo- et mylo-pharyngeos non viderit, vti *Santorinus* putarat, ſed quod examina ſua in obiectis ex corpore euulſis, non in ſitu naturali, inſtituerit: quo poſito deſcriptiones paris gloſſopharyngei *Valſaluae* et pterygo-ac mylo-pharyngei *Santorini* proxime inter ſe conueniunt. Hic vero *Santorini* diligentia imprimis laudanda eſt; qui quamuis ante ipſum quidem *Duglaſſius* mylopharyngeum indicauerit, vti recte *Heiſterus* monet: nihilominus tamen non ſolum originem huius paris (7) ex inferiore maxilla, pone vltimum dentem molarem, et alterius pterygopharyngei (8) ex alae interioris corniculo ſtrictius indicauit, ſed etiam inceſſus horum muſculorum recuruos et verſus occiput reflexos fuſius explicauit. In qua re accuratiſſimum alias *Winsloium* multum anteceſſit, qui partim mylopharyngeum diſtincte

(2) l. c. Cap. VII. § III. (3) l. c. Cap. XV. §. 74. VII. (4) l. c. Cap. II. § XX. (5) l. c. §. 74. VI. (6) l. c. Cap. VIII. §. V. (7) Portio conſtrictoris ſuperioris pharyngis Albini, qua ex interna parte maxillae inferioris iuxta ſuperiora foſſulae molaris poſtremi procedit. L. III. Cap. LVI. (8) Portio ex interna totius longitudinis hamuli proceſſus pterygoidei, et huius ipſius lamellae internae ad hamuli radicem Albini l. c.

ſtincte non (9) detexit; (deſcriptio enim myloglosſi ſui (1) huc, vti *Albinus* (2) ſuſpicatur, minime quadrat) partim pterygopharyngeum cum petro- et ſalpingo-pharyngeo commiſcuit, qui ambo tamen quoad originem toto pollice diſtant, nec eodem tramite recurro incedunt.

XV. *Periſtaphylo-pharyngei* (3) *Winslowiani* mihi quidem nil aliud eſſe videntur, quam ea oeſophagei portio, quam *Cowperus* ex tendine pterygoſtaphylini ſui educit et Tab. XXVIII. fig. II. lit. L. diſtincte repraeſentat. Qua in re num recte auguratus ſim, nemo melius niſi ipſe *Cel. Autor* iudicare poteſt. Certe huius deſcriptio cum illius icone, et icon cum obiecto plurimum concordat: tum vero ad hyperopharyngaeum *Santorini* (4) aut palatopharyngeum *Albini* (5) referri non poteſt. Recte autem *Cowperus* ſe ipſum correxit, dum hanc portionem pro pterygopharyngeo, vti pridem fecerat, haberi noluit, quippe a quo occultatur, ita, vt ſi illam detegere velis, hunc prius a corniculo et ala ſoluere debeas.

XVI. Sed quid denique factum eſt ex *ſpheno-pharyngeo Riolani*? (XIV.) An igitur nullus muſculus ex acuto apice oſſis ſphenoidis in pharyngem egreditur? Non euanuit quidem ipſe muſculus, ſed tamen in alium mutatus eſt ab Autoribus. *Duglaſſius* (6) et *Santorinus* (7)

 Sal-

(9) l. c. §. 480. (1) l. c. §. 517. (2) Lib. III. Cap. LVI. not. (3) l. c. §. 478. (4) l. c. Cap. VII. §. XIII. (5) l. c. Lib. III. Cap. LVIII. not. et Winsl. l. c. §. 478. (6) l. c. Cap. XV. §. 74. VIII. (7) l. c. Cap. VII. §. IV.

ſalpingopharyngeum vocitarunt. *Ille* originem in *extremitate* partis *oſſeae tubae*, hic in *poſtica crepidine cartilaginea* tubae ponit. *Winslowius* (8) *duos* producit, petropharyngeum et ſpheno-ſalpingo-pharyngeum. Poſſunt autem hi omnes facile conciliari. Cum enim principium muſculi non teres, ſed paullum diffuſum ſit: denominatio etiam ab origine deſumta latitudinem quandam admittit; inde, poſita origine *Duglaſſii*, petropharyngeus, et iuxta *Santorinum* ſalpingopharyngeus, vel vtroque nomine dici poteſt. Atque haec eſt ſine dubio illa *portio conſtrictoris pharyngis ſuperioris Albini* (9), quae ab imo petroſo procedit. Sed liceat et *meas* interſpergere obſeruationes. Ego non modo ex iisdem principiis, ſed et *ex ipſo apice* proceſſus ſpinoſi oſſis ſphenoidis muſculum teretem oriri aliquoties vidi. Ambo ſibi lateraliter accumbentes, recta (vt *Santorini* verbis vtar) demiſſi in pharyngem deſcenderunt. Ad hos autem mylo- et pterygo-pharyngei verſus poſteriora reflectentes ita accedunt, vt aliquas fibras cum illis commiſceant, et quaſi *repagulum* aliquod nanciſcantur, quo prolongata eorum caruatura ſuſtinetur. Deficiente hoc poſtremo muſculo, certe *expanſio* quaedam *tendinea* ex eodem apice egreditur, quae eiusdem repaguli vicem praeſtet. Muſculus autem *ſalpingopharyngeus Santorini*, *Duglaſſii*, et *Winslowii* plane non confundendus eſt cum *ſalpingopharyngeo Albini* (1), quem hic Auctor ex *Euſtachio* et *Drackio* reſtituit; quem vero ipſe *ego* hactenus detegere non valui.

XVII.

(8) l. c. §. 476. (9) l. c. Lib. III. Cap. LVI. (1) l. c. Lib. III. Cap. LVII.

XVII. Cuſo ſemel nomine *gloſſopharyngei* a *Valſalua*, quo quid intelligi debeat, ſupra (XIV.) indicauimus, placuit *Santorino* (2) illud retinere. Cum vero longe alium fibrarum faſciculum hoc vocabulo indicet, mire ſed inutiliter certe ſe torquet, vt ſuam deſcriptionem cum *Valſaluiana* conciliet, quae tamen re ipſa diſcrepant. Eſt autem *gloſſopharyngeus Santorini* nil aliud niſi illa fibrarum *portio genioglоſſi*, quae ex mento lateraliter demiſſa et inflexa ſub ceratogloſſo retrorſum incedit, tum partim ſurſum diffuſa ſub ſtylogloſſo et mylopharyngeo abſconditur, partim vero ſtylopharyngeum eo praeciſe loco, vbi hic in pharyngem implantatur, transgreſſa cum hyopharyngeo verſus poſteriora properat. Quae poſtrema *ea* eſt, quam *Winslowius* muſculum *geniopharyngeum* (3) nominauit; *Albinus* autem ad *conſtrictorem pharyngis ſuperiorem* (4) retulit. Quapropter, ſi mylopharyngeum in cenſum muſculorum pharyngis recèperis, et geniogloſſum bene deſcripſeris: gloſſopharyngeum nomen plane exterminari deberet, niſi portio illa, quam *Albinus* ad eundem conſtrictorem componendum ex latere radicis linguae deriuat, obſtaret, de cuius exiſtentia, vti autoritatem et fidem Viri veneror, ita ſententiam meam, ob defectum ſufficientis indagationis ſuspendo.

XVIII. Qualis confuſio eſt in deſcribendis muſculis pharyngis: talis etiam propemodum deprehenditur in *myographia linguae*. *Veſalius* (5) *quatuor* paria enumeraue-

(2) l. c. Cap. VII. §. VI. (3) l. c. §. 480. (4) l. c. Lib. III. Cap. LVI.
(5) C. H. Fabric. Lib. II. Cap. XIX.

rauerat, cum *vno nono* ſimplici. De pari eius ſecundo et tertio nulla vmquam fuit diſputatio. Omnes enim Anatomici iſtud pro *ceratogloſſis*, hoc pro *ſtylogloſſis* aſſumſerant; niſi quod iſtud poſtmodum ratione diuerſae originis ex oſſe hyoide in tria alia nempe in *baſio-chondro-cerato-gloſſos* (6) diuiſum fuerit. *Nonus Veſalii* a *Columbo*, *Fallopio*, *Riolano*, *Spigelio* et ſequentibus ſcriptoribus omnibus pro *geniogloſſo* erat agnitus. Sed par eius *primum quale* fuerit, nemo recte aſſequutus eſt. *Fallopius* (7) ſuſpicabatur, per illud intelligi debere par *geniohyoides*; qnod et veroſimillimum. Expunxit igitur hoc par ex catalogo muſculorum linguae, et ad os hyoides retulit, cui et hodienum annumeratur. *Columbus* (8) *Veſalium* aut correxit, aut aliud par primum ſubſtituit; quod autem intellectu aeque obſcurum eſt. *Tales* enim muſculi, *quales Columbus* deſcribit, non dantur. Quapropter et *hoc* par *Fallopius*, *Laurentius*, *Riolanus* reiecerunt, quos merito ſequuti ſunt *omnes* Auctores genuini. Solus *Spigelius* (9) vtrumque par tam *Veſalii* quam *Columbi* inepte retinuit, *illudque* par *tertium hypſilogloſſum*, *hoc* par *primum linguale* vocauit, in quo Compilatorem ſimilem *Bauhinum* (1) aliqua ex parte ſectatorem habuit. Sed neſcio quo pacto etiam Dexterrimus *Duglaſſ* (2) ſeductus eſt, vt lingualem ſuum pro linguali *Spigelii* et *Columbi* habuerit, qui tamen diuerſiſſimi ſunt. *Iſti* enim bini *Viri* originem in baſi oſſis hyoidis ponunt; *Duglaſſius* autem in baſi linguae. *Lingualis Spigelii nullibi*

(6) vid. Duglaſſ. l. c. Cap. XIII. §. 59. Albinus l. c. Lib. III. Cap. XLIX. L. LI. Winslow. l. c. §. 520. (7) Obſ. Anat. de muſculis oſſis hyoidis. (8) De re Anatom. Lib. V. Cap. XIII. (9) l. c Lib. IV. Cap. VI. de lingua. (1) l. c. Lib. III. Cap. XC. IV. (2) l. c. Cap. XIII. §. 61.

libi exſtat; ſed *Lingualis Duglaſſii idem* eſt cum *Linguali Albini* (3), qui detegitur, quando baſio-chondro-cerato-gloſſum ab oſſe hyoide et a latere geniogloſſi ſolutum linguam verſus reflexeris.

XIX. Denique *quartum par Veſalii* aeque *fictitium* ac primum tamen eadem fata non expertum eſt; ſed ab *omnibus* fere ſcriptoribus, *Fallopio et Neotericis* exceptis, *myloglossi* nomine conſeruatum. Certe, ſi aſſumas cum *Veſalio*, *hos muſculos ex inferioris maxillae lateribus intus ad dentium molarium radicem*, et quidem *ſtrictim ex oſſe* enaſci: tales nullibi dari aſſentior, niſi forte mylopharyngeus ex maxilla inferiore ortus pro hoc pari accipiendus ſit. Si vero per hos terminos tantummodo *regionem* iſtam circa maxillam *cum quadam latitudine* intelligere liceret: magnam ſane quoad reliqua ſimilitudinem inter hunc muſculum *mylogloſſum Veſalii* et *lingualem Albini* ac *Duglaſſii* deprehenderes. Imo putauerim, *muſculum* illum, de cuius ſtructura et terminis *Verheyhenius* (4) in deſcriptione ſua dubitauit, et quem *Veslingius* (5) olim delineauit, nil aliud eſſe niſi *lingualem Albini*, etiamſi hi duo Viri *nomen mylogloſſum* vna cum *definitione*, vtpote tum temporis magis *recepta*, adoptauerint; in qua opinione eo magis confirmor, quod et ramum nerui lingualis, qui hunc muſculum comitari ſolet, *Veslingius* ſimul annotauerit.

XX. Circa *Laryngis muſculos* quamuis per decem annorum decurſum ſaepe ac multum verſatus fuerim:

(3) l. c. Lib. III. Cap. LIV. (4) Anat. C. H. Tract. IV. Cap. XIX. (5) l. c. Tab. XI. fig. XIV. E a.

omnia tamen, quae tum temporis vt ſingularia notaueram, a nouiſſimis Scriptoribus plurimam partem diſerte expoſita ſunt. Coronidis loco non poſſum non *iconem* communicare, qui muſculum *cricothyreoidem duplicem* iuxta ideam *Albini* (6) *ex toto diſtinctum* habitu adeo natiuo exprimit, vt putares, aut deſcriptionem ad figuram aut hanc ad illam ſtudio accommodatam fuiſſe, cum tamen illam iam anno 1733. delineari curauerim. Denotatur autem

Tabula X. Figura II.

Tabula X. Figura II.

a. Cartilago ſcutiformis.
b. Annulus cartilagineus tracheae.
c. Muſculus cricothyreoides dexter anterior.
d. —— —— —— —— lateralis.
e. —— —— —— ſiniſter anterior.

OB-

(6) L. c. Lib. III. Cap. LXIII.

OBSERVATA IN SECTIONE IVVENIS 1735. CVIVS MANVS ET PEDES MONSTROSI ERANT.

AVCTORE
Joſia Weitbrecht.

NVtritus eſt per aliquot annos in Academia iuuenis quidam, nomine Fomka (Thomas), qui in artuum ſuorum extremitatibus variis defectibus laborabat; quo per morbum e viuis ſublato, operae pretium duxi inquirere, quales mutationes organa ſub habitu iſto externo monſtroſo ac difformi latentia paſſa eſſent. Harum mutationum breuem dabo deſcriptionem, quam illi, qui circa indagandas monſtrorum origines verſantur, in ſuos forte vſus conuertere poterunt. Tabula X. Fig. III.–V.

Erat homo ſtaturae breuis; in manu dextera gerebat pollicem et vnum digitum; in manu ſiniſtra pollicem, et duos digitos, in pede autem vtroque pollicem et vnum digitum. Harum extremitatum articulationes erant incuruam poſitionem nactae, ita, vt digiti non niſi tamquam ſcarabaeorum cornua verſus ſe inclinari potuerint, hinc ipſe difficulter aliquid apprehenderit, et difficilius longe inceſſerit. Si crura in directum iacebant cum corpore et femore, vix quicquam praeternaturale circa poplitem apparebat; in inceſſu autem vterque pes genu flexionem vix admittebat. Acetabuli autem iun-

ctura ita erat comparata, vt femora attolli quidem, ſed dextrum non niſi abduci, ſiniſtrum autem non niſi adduci poſſet.

Interna viſcera cadaueris labe omni carebant, praeter cauſſas et effectus morbi, diarrhoeae. Polypi autem omnia vaſa tam venoſa quam arterioſa obſederant.

Oſſa humeri, cubiti, femoris, tibiae a ſtructura ordinaria nil receſſerant; ſed omnis degeneratio in oſſibus carpi, metacarpi, tarſi et metatarſi atque in phalangis digitorum deprehendebatur; quae nunc tamquam praeſentia deſcribo.

Oſſa carpi ſunt ſeptem in quauis manu, magis quidem irregularia quam in ſtatu naturali, ſed diſcernibilia tamen; iuncturarum faciebus tam inter ſe quam ad radiorum et oſſium metacarpi articulationem accommodatis. Quatuor ordinem ſuperiorem conſtituunt; tria inferiorem; deeſt enim os ſeptimum, omnino quidem in Tabula X. dextera, ita vt inter os ſextum et octauum hiatus re- Figura III. linquatur, os autem octauum vnica cauitate glenoide gaudeat pro recipiendo oſſe metacarpi digiti vnici. Contra vero in ſiniſtra manu os octauum non modo, vti naturaliter eſſe ſolet, pro locandis duobus oſſibus metacarpi duas foſſulas habet, ſed et multo craſſius ac latius diffu- Figura IV. ſum euaſit, dum os ſeptimum tuberoſum cum illo coaluiſſe videatur. In dextera os quintum ſolum cum metacarpo pollicis iungitur, et os ſextum iunctura cum metacarpo caret; in ſiniſtra autem os metacarpi pollicis cum ambobus oſſibus quinto et ſexto articulatur. Bini ordines etiam motum inter ſe admittunt.

In

In vtraque manu ſinguli pollices et digiti ſuis oſſibus metacarpi gaudent. In ſiniſtra bini digiti ſunt auricularis atque annularis, vti patet ex articulatione cum carpo, atque ex ipſorum oſſium proportione. Digitus autem in dextera, ratione craſſitiei oſſium et ratione baſeos oſſis metacarpi, index eſſe videtur, ſed articulatio cum carpo vel annularem vel auricularem eſſe vel vtriusque vicem gerere indicat.

Os metacarpi pollicis dextri in iunctura cum carpo deficit, non enim baſi duplicata gaudet in medio eleuata, ſed in foueolam glenoidem ſolam excauata eſt. Extremitas eius altera, quae iuncturam cum phalanga prima conſtituit, nimis compreſſa eſt. Os metacarpi pollicis ſiniſtri autem cum ſtatu naturali perfecte conuenit.

Os metacarpi digiti dextri in baſi ſua proceſſum habet ſubrotundum pro articulo cum carpo; vnde os indicis quodammodo, vti diximus, repraeſentat; ſed tuber laterale ferme deeſt. Capituli autem extremitas inuerſe quaſi appoſita eſt, quippe in dorſo diffuſa palmam verſus anguſtatur, cum naturali ordine in palmae regione in duos proceſſulos explanari debeat. Oſſa metacarpi digitorum annularis et auricularis in ſiniſtra a naturali ſtatu non recedunt; et iuſto modo tam inter ſe quam cum carpo articulantur; ſolum os metacarpi annularis in iunctura baſeos cum carpo rotundius eſt, et iunctura laterali pro oſſe metacarpi medio caret. Deficiunt igitur in dextera manu oſſa metacarpi tria, in ſiniſtra autem duo: ita, vt ne veſtigium vllum ſit repertum.

Oſſa phalangarum tam pollicum quam digitorum in vtraque manu quoad formam, atticulationem et appendices cum habitu naturali omnino conueniunt; hoc tamen cum diſcrimine, quod phalanga prima pollicum iuſto tenuior, extima autem nimis compreſſa et applanata, et in apicibus plane perforata ſit pro vaſorum transitu. In reliquis digitis phalanga capitulis non adeo rotundis ſed magis appreſſis gaudet, extimum autem os digiti auricularis ſiniſtri nimis extenuatum eſt.

Oſſa tali et calcis naturali proportione, ſtructura et articulatione incedunt. Calcaneum dextrum autem in latere externo proceſſulum habet, cui fibula inſiſtit. Oſſa nauicularia protuberantia laterali carent. Dextrum articulatur cum talo poſticitus, lateraliter cum oſſe cuboide, anterius cum oſſe cuneiformi vnico; ſiniſtrum autem cum cuneiformibus duobus. Os cuboides dextrum articulatur cum calcaneo, cum oſſe ſcaphoide et cum oſſe metatarſi vnius digiti; ſiniſtrum vero praeterea cum oſſe cuneiformi altero; ceterum et ſulcus pro transitu tendinis peronei poſtici perfectus adeſt. Sola oſſa cuneiformia multum differunt. In dextero pede vnicum, in ſiniſtro duo adſunt. Ambo maiora iuncturam ſuam anteriorem ita exſculptam habent, vt oſſa metatarſi pollicis non directe ſed lateraliter applantentur, atque ita extremitas pedis ad curuaturam illam diſponatur.

Os cuneiforme ſiniſtrum alterum reuera nomen ſuum tuetur, quippe inter os primum, ſcaphoides et cuboides inclauatum eſt.

Oſſa

Oſſa metatarſi tam quoad formam quam quoad iun-ctura naturalibus non ſunt ſimilia, imo tota digitorum et pollicum extremitas maiorem quam reliqua oſſa difformitatem prae ſe fert. Iunctura oſſis dextri pollicis ſimplex et oualis, ſiniſtri autem duplex eſt, per intermediam lineam protuberantem diſtincta. Oſſa metatarſi digitorum proceſſu laterali, quo alias os quintum gaudet, deſtituuntur. Dextrum ſimplex eſt. Siniſtrum, quaſi ex duobus coaluiſſet, apparet; hinc et duplici iunctura pro articulatione cum oſſe cuboide inſtructum eſt. Phalangae primae cum oſſibus metatarſi non in directum iacent, ſed ad latera appoſitae ſunt, vt curuaturam efficiant. Reliquae phalangae nil extraordinarii oſtendunt. Deſunt igitur in dextero pede oſſa cuneiformia duo, oſſa metatarſi tria cum digitis reſpondentibus, in ſiniſtro os cuneiforme vnicum, oſſa metatarſi tria cum iisdem digitis tribus reſpondentibus. Tabula X. Figura V.

Muſculi manuum omnes aderant, imo in ſiniſtra ne palmaris quidem deficiebat, ſine aponeuroſi tamen. Tendines extenſorum et flexorum, qui ad digitos pertinent, tot aderant, quot numerus digitorum poſcebat, id quod et de lumbricalibus intelligendum. In manu dextera erat tam abductor quam adductor interoſſeo ſimilis, in ſiniſtra autem interoſſei duo.

In vtroque pede aderant ſequentes muſculi: 1. Flexor pedis, tibialis anticus, vna cum retinaculo aliquo ligamentoſo ex malleo interno ipſum transſcendente. Terminabatur in phalangae primae pollicis tubere laterali, et anterius in oſſe metatarſi. 2. Extenſores digitorum com-

communes, longus et breuis, ſinguli in tres tendines diremti, quorum vnus ad pollicem reliqui duo ad digiti phalangam mediam et vltimam acceſſere. Quia etiam phalanga prima digiti cum oſſe ſuo metatarſi non in directum iaceat, ſed ad angulum lateraliter illi apponatur: hinc tendines extenſorum circa iuncturam ligamentum nacti ſunt, vt cum digito reflecti poſſent. 3. Extenſor pollicis longus in phalangam primam tendine duplici terminatus. 4. Peroneus poſticus, cuius tendo ſulcum in oſſe cubiformi transgreſſus partim in hoc ipſo oſſe, partim in medio oſſe metatarſi pollicis eſt inſertus. 5. Flexor pollicis breuis. 6. Lumbricalis, cuius tendo cum rudimento extenſoris breuis coaluit. 7. Abductor proprius minimi digiti, ex oſſe metatarſi eductus. 8. Perforans, non a tibia, ſed ex fibula ortus, non niſi in tendines duos diremtus, qui cum tendinibus perforatis connati ad extremam pollicis et digiti phalangam continuabantur.

Contra vero in vtroque pede defecit flexor pollicis longus, cuius venter cum peroneo poſtico coaluit.

Singulatim in pede dextro aderant peroneus anticus, ſeu medius, et minor; qui ambo autem in pede ſiniſtro deſiderati ſunt.

IX.

EXPLICATIO
DIFFICILIORVM EXPERIMENTORVM
CIRCA
ASCENSVM AQVAE IN TVBOS CAPILLARES.

AVCTORE
Ioſia Weitbrecht.

§. 1.

IN diſſertatione (*) de aſcenſu aquae in tubis capillaribus difficiliora quaedam experimenta, et alia, quae theoriae ibidem ſtabilitae contraria viderentur, in peculiari ſcripto ad examen reuocare pollicitus eram; quod promiſſum complere in hisce paginis nunc adgredior. Vt autem ordine procedamus, omnia iſtiusmodi phaenomena commode in *tres* claſſes diſtribuemus. Erunt enim *alia*, quae competunt tubis capillaribus cylindricis, ſeu eiusdem vbique diametri; *alia*, quae occurrunt in tubis conicis, ſeu diametro quomodocunque variante; *alia* denique, quae ad ſiphones pertinent, horumque naturam inuoluunt. Tabula XI. et XII. Fig. 1—40.

§. 2. In *tubis cylindricis* ante omnia attendendum eſt, vt in ſingulis experimentis *veram altitudinem* nanciſcamur, ad quam aqua in illis virtute ſola attractionis aſcendere poteſt; cuius cauſſa ſingularem proprietatem conſiderare oportet, quam ſequenti propoſitione includimus: *In tubo capillari cylindrico, aqua ad eandem altitudinem ſupra*

(*) Commentar. Tom. VIII. in fine pag. 309.

Tabula XI. *ſupra libellam eleuatur, quousque licet tubulus immergatur.* Huius propoſitionis veritatem experientia abunde commonſtrat. Experim. I. Si enim tubus AB ſuperficiem aquae in vaſe tan-Figura I. gat, haec ad datam altitudinem BC rapitur, tumque ſubſiſtit. Si idem tubus profundius immergatur vsque ad *b*, tunc aqua in illo non ſolum ad altitudinem cum ſuperficie aquae in vaſe parallelam ſtabit, ſed et vltra libellam porro aſcendet ad altitudinem *bc*, aequalem illi, ad quam rapta fuerat, cum extremitas tubi aquam tantummodo lambebat. Si immerſio fiat ad C: aqua aſcendet vsque ad D; ita vt ſit DC=BC. Verbo: ad quamcunque profunditatem tubulum capillarem immergas; ſemper altitudines ſupra libellam ſibi aequales erunt. Agnouit hanc veritatem quoque *Cel. Muſſchenbroek* in Diſſertatione phyſica de Tubis capillaribus Vitreis Cap. I. Exper. III.

§. 3. Non ſolum vero *eadem altitudo*, et conſequenter, ob diametrorum aequalitatem, *eadem aquae quantitas erit, quando cylindrus aqueus* in tubo continuus eſt; ſed etiam, quando ille *per interiectum aerem in portiones* Exper 2. *diremitur.* Sit enim tubulus AB cylindricus, cuius oſcu-Figura 2. lum B ſuperficiei aquae in vaſe perpendiculariter admotum lambat, et attrahat, quantum oportet, ad debitam altitudinem. Remotus iſte tubulus, et paulum inclinatus, vt aqua attracta CD verſus oſculum ſuperius A moueatur, et ſpatium relinquat aeri DB, immergatur denuo profundius in vaſculum: tum aqua tam intra tubulum BF, quam in vaſe ſtabit ad altitudinem eandem, et quantitas attracta Figura 3. CD haerebit ſupra illam interiecta bulla aerea DF. Si quantitas CD maior erit, quam attractio concedit, et ea-

dem

dem methodo procedas: tum aquae noua portio non aſcendet ad libellam aquae in vaſculo F, ſed depreſſius ſtabit ad BG, et quidem eo profundius, quo magis altitudo DC altitudinem debitam excedit. Quodſi vero quantitas DC minor fuerit, quam attractioni competit, et omnia denuo eadem methodo peragas: tum aqua non ſolum ad libellam vsque BF, ſed et multo altius ad FG aſcendet, quantum nimirum requiritur, vt ſumma altitudinum DC et FG aequalis fiat altitudini debitae. Verbo, ſumma altitudinum CD et BG (fig. 3. 4.) ſemper eſt aequalis ſummae altitudinum CD et BF (fig. 2.), ſi immerſio ſemper ad eandem profunditatem facta eſt; et, ſi interiecta bulla aerea eiusdem ſemper eſſet altitudinis: punctum C ſemper ad eandem altitudinem ſupra libellam ſtaret, quemadmodum in experimento antecedente (§. 2.) factum eſt. Tabula XI. *Exper.* 2. Figura 4.

§. 4. Quod vero per experimenta antecedentia (§. 2. 3.) actu ita ſe habere intelleximus: id neceſſario ita fieri debere ex theoria noſtra ſequitur. Tota enim ſuperficies interna tubi attrahit, quando aqua ad debitam diſtantiam acceſſit; et quia tubus in tota longitudine eiusdem vbique diametri ſupponitur; omnes peripheriae, quotquot ſuperficiei cylindri aquei immediate proximos conceperis, inter ſe aequales erunt, hinc ſemper non niſi eandem quantitatem aquae eleuare ac ſuſpendere valebunt: ſemper igitur aqua in tubo ad eandem altitudinem ſupra libellam in vaſe aſcendit; quia quicquid infra libellam continetur, id omne ab aequali cylindro aqueo in vaſe aequilibrari cenſendum eſt. Neque quicquam refert, etiamſi per interiectum aerem in partes diuidatur. Sunt enim tres peripheriae vi-

 treae,

Tabula XI. treae, C, D et F, quae virtutem ſuam attractiuam in aquam exercent, et quae inter ſe aequales ſunt: quia autem harum binae, D et F, quae bullam vtrinque tangunt, ſibi contrariae ſunt; hinc ſe mutuo deſtruunt, et ſola attractio peripheriae ſupremae reſtat, a cuius actione totus effectus dependet.

§. 5. Quodſi igitur accidit, vt tubulus aquam ad maiorem altitudinem retineat, quam vis attractiua peripheriae ſupremae conſeruare ſolet: neceſſario exinde ſequitur, aliam quandam cauſſam ſubeſſe, cui ſuſtentatio quantitatis ſuperfluae tribuenda ſit. Dum enim dico, aquam non niſi ad datam altitudinem aſcendere, non ſimul nego, fieri poſſe, vt aqua ad maiorem altitudinem, in tubulo aliter ac per attractionem ſimplicem repleto, haereat ac ſuſtentetur. Hoc enim experimenta abunde docent. Obſeruarunt id etiam *Petit* in hiſt. Ac. ſc. Par. 1724. et *Muſſchenbroek* l. c. Exp. IV. Quaeramus igitur huius phaenomeni limites et cauſſas.

§. 6. Admoueatur tubulus AB ſuperficiei aquae V, Exper. 3. vt haec aſcendat ad altitudinem quamcunque BC. Quo Figura 5. facto eleuetur tubulus paullulum, vt a ſuperficie aquae ad altitudinem Bb recedet. In hoc receſſu cylinder aqueus CB a ſuperficie non auellitur, ſed intra tubum a C ad c deſcendit, atque inter terminum tubi B et ſuperficiem aquae b, conus aliquis, vt ita vocem, aqueus Bb formatur; coutinuata autem tubi eleuatione iſte rumpitur, et cylinder aqueus ad priſtinam altitudinem C reſilit. Huius quidem phaenomeni cauſſa in promtu eſt. Primo enim

attra-

attractio, quae inter particulas aqueas intercedit, non permittit, vt in ipſo receſſus puncto totalis auulſio fiat; reſtat igitur tantiſper cohaeſio aliqualis inter cylindrulum in tubo, et aggerem aqueum circa tubi extremitatem genitum, et inter aquam in vaſe. Fac iam tubulum, qui aquae ſufficientem quantitatem hauſit, eleuari, et aquam ad eandem altitudinem intra eum conſeruari: eo ipſo per generationem atque additionem conuli illius cylindrulus altitudinis maioris orietur, quam qui a peripheria C ſuſtineri poteſt; ergo neceſſario aqua intra tubulum tantillum deſcendere debet, quantum nimirum altitudo illius conuli requirit. Quia vero, continuata tubi eleuatione, conulus tandem maior et grauior euadit; quam vt cohaeſio eius cum cylindrulo a mutua aquae attractione conſeruari posſit: neceſſario tandem rumpitur, et conulus cum aqua in vaſe miſcetur, cylindrulus autem denuo ad eam altitudinem intra tubulum eleuatur, quantum vis attractiua peripheriae ſupremae ſuſtentare valuerat. Tabula XI.

§. 7. Quando experimentum antecedens cum tubulo, cuius latera tenuia ſunt, capitur et lente inſtituitur; tunc, vti diximus, altitudo ad quam cylinder reſilit, eadem eſt, ad quam conſtiterat ante auulſionem. Quando autem tubulus ex vitro craſſiore conflatus eſt, vt extremitas eius B latam baſin conſtituat: tum facta auulſione cylinder ad *altitudinem maiorem* reſilit, et quidem, quo celerius tubulum auellis, eo altius aqua aſcendit; baſi autem tubi B circa orificium gutta aquea adhaereſcit. Ita e. gr. tubulus, qui perpendiculariter immiſſus aquam attraxerat ad altitudinem $6\frac{3}{10}$ linearum; cum idem ille ex aqua celeriter Figura 6. Exper. 4.

leriter extraheretur, retinuit illam ad altitudinem 7. linearum, et cum alia vice extractio multo celerius repeteretur, erat altitudo 8. linearum.

§. 8. Atque hi ſunt illi caſus, de quibus (§. 5.) loquuti ſumus, et qui a regula noſtra generali (§. 1.) deflectunt, quorum vero ratio ex theoria noſtra itidem optime deducitur. Aquam enim tubo vbique adhaerere docuimus (Prop. XIV.); ergo quo craſſius eſt vitrum, et conſequenter, quo latior eſt baſis circa orificium inferius, quae aquam in vaſe lambit, eo maior gutta inter remouendum adhaeret. Praeterea attractio inter vitrum et aquam maior eſt, quam inter particulas aqueas ipſas (Prop. IX.); ergo quo celerius tubus auellitur, eo plus aquae huic eidem baſi adhaereſcit. Porro vim attractiuam, quae aquam in tubo actu eleuat, definiuimus (Prop. XXVIII.), quod ſit $=d(p-q)$. Quando igitur tubulus remouetur, vis illa $=q$ euaneſcit, et vis eleuans p tota, non imminuta agit, cylindrus igitur aqueus ad altitudinem maiorem aſcendit, et portionem guttae baſi adhaerentis ſecum intra cauitatem tubi rapit. Denique iſta vis eleuans non ſolum non imminuitur, ſed etiam adiuuatur ope eiusdem guttae orificio extremo adhaerentis. Haec enim cum ab attractione limbi vitrei retinetur, in ſimul etiam repagulum quaſi conſtituit, cui portio quaedam cylindri intra tubum inſiſtere poteſt, quae non prius deſcendit, quam gutta iſta tanta euaſerit, vt pondere ſuo proprio cohaſionem rumpat, ac delabatur.

§. 9. Si quis autem foret, qui dubitet, guttam baſi extremae adhaerentem cylindri deſcenſum impedire poſſe,

vt

vt ad maiorem altitudinem conſeruari queat, quam quae peripheriae tubi ſupremae conuenit, ille ad ſequentis experimenti phaenomena diuerſa animum appellere non dedignetur. Tabula XI.

I. Tubulum AG qui ſua ſponte aquam attraxit ad altitudinem $6\frac{1}{2}$ linearum, ad eandem altitudinem repleui, inclinatumque, vt attracta quantitas in ſitum BC recederet, denuo immerſi: quo facto, et extracto tubo, obſeruaui, inferiorem aquam non omnem effluere, ſed perſiſtere ad altitudinem duarum circiter linearum DG, inſimul ſuperficiem eius infimam fieri conuexam et limbo orificii G adhaerere; inter portionem ſuperiorem autem BC, et inferiorem DG bullam aeream CD interceptam eſſe. *Exper.* 5. Figura 7.

II. Poſtquam portionem ſuperiorem BC auxi ad altitudinem $7\frac{1}{2}$. lin. et porro eadem methodo proceſſi: reſtitit portio inferior GD ad altitudinem vnius lineae, cum iisdem phaenomenis. Figura 8.

III. Aucta portine ſuperiore BC ad altitudinem 8. linearum: obſeruaui, loco portionis DG, reſtare tantummodo particulam conuexam G, quae tamquam ſemiglobulus aqueus ad marginem orificii circumquaque haerebat, cauitatem vitri autem non intrabat. Figura 9.

IV. Denique aucta portione BC ad altitudinem $8\frac{1}{2}$. linearum, et ceteris eadem methodo peractis obſeruaui, portionem DG omnem effluere, excepta pellicula ſeu lamellula aquea, D, tenuiſſima, ſemigloboſa, ad marginem oſculi inferioris adhaerens, ſolo aere plena; quae autem leuiſſima ſucceſſione rumpebatur, vt bulla aerea CD lamellae inſiſtens aufugeret: et portio BC $8\frac{1}{2}$. linearum ad oſculum inferius plane deſcenderet. Figura 10.

V. Por-

Tabula XI. V. Portionem BC, quae ab iſto tubo attrahebatur ad altitudinem $6\frac{1}{2}$. linearum, auxi plus quam duabus lineis, vt
Exper. 5. euaderet 9, 10, vel plures lineas alta; quo facto, quando,
Figura 9. intercepta bulla aerea nouam aquae portionem admittere tentabam, vel quando interpoſitis pluribus bullis, maſſae partiales aqueae, BC, ED, FG ſimul ſumtae maiores erant altitudine $8\frac{1}{2}$, vel 9, vel 10. linearum: tunc aqua ſuperflua nullo modo inter tubum retinebatur, ſed omnis effluebat.

§. 10. Experimentum hoc (§ 9.) commemoratum duas potiſſimum veritates manifeſte demonſtrat. Altera eſt, quam aſſumſimus §. 8°, quod *gutta aquea extremitati tubi adhaerens deſcenſum cylindri aquei* BC *intra tubum impediat.* Hoc enim ex phaenomeno imprimis III. et IV. luculentiſſime apparet, dum quantitas cylindri BC et conſequenter pondus eius ita augetur, vt aqua DG infra aerem interceptum poſita fere omnis eiiciatur, et ſola aliqua lamella reſtet, quae limbo orificii adhaerens globoſa et vacua incumbentem aeris intercepti bullam ſola tenacitate ſua ab attractione particularum aquearum dependente retineat, donec ope ſucceuſſionis diffringatur, aeremque dimittat; quemadmodum fieri ſolet, quando in liquore aliquo ſpumante bullulae aereae, rupta fluidi lamella tenui, globoſa, diſſiliunt. Altera veritas haec eſt, *quod augmentum cylindri aquei* BC *vltra debitam altitudinem ſuos limites habeat*, et vltra duas tresue lineas extendi vix poſſit. Nam in phaenomeno I. aqua conſeruabatur infra aerem interceptum ad duas lineas, in phaenomeno II. tantum ad lineam, et in phaenomeno IV. et V. plane omnis

aer

aer et aqua ſuperflua ei ſubiecta eiiciebatur. Quippe omnis diuerſitas altitudinis eo redit, ne cylinder aqueus BC plus augeatur, quam cohaeſio guttulae infimae cum limbo orificii inferioris reſiſtere poſſit. Tabula XI.

§. 11. Atque ex his facile patet, quo loco habenda ſit *Cel. Muſſchenbroekii* ſententia, quam Experimenti XI. Scholio, Cap. I. adiecit. Poſtquam enim in experimento adhibita ſua encheiriſi vidit, infra interceptam aeris bullam nouam aquae portionem ad duas tresue lineas ſuſtineri; exinde concluſit, fieri hoc modo poſſe, vt multo plus aquae, quam 20. linearum (quae erat altitudo ordinaria) in tubo ſuſpenſum haereat, modo portiones aqueae frequentibus bullis aereis ſint interruptae. In quam opionem delapſus eſt, quia animo eius neſcio quae aeris tenacitas et adhaeſio ad tubi parietes inſederat, in quam ſuperabundantis huius aquae ſuſpenſionem reiiciebat. Inde enim ita viſus eſt ratiocinari. Si vna bulla aerea ſuſpendere poteſt aquam ad duas tresue lineas: poſſunt etiam bullae duae pluresue aquam ſuſpendere ad quatuor, ſexve aut plures lineas. At vero, ſi placuiſſet *Cel.* Auctori, experimenti periculum facere: omnem illam fictitiam aeris tenacitatem vel ſaltim effectum eius praetenſum euaneſcere, et ſuſpenſionem augmenti aquei ab alia cauſſa dependere, pro perſpicacitate ſua mox intellexiſſet. Figura 11.

§. 12. Apparet ex dictis (§. 5—10.), in experimentis faciendis multa cautela opus eſſe, vt *veras* attractionum altitudines in ſingulis tubulis nanciſcamur, quod tamen tanto magis neceſſarium eſt, quanto minus fieri

poteſt, vt ſine hac rectitudine iuſtas comparationes inter illas inſtituamus. Huius rei methodum aliquam ex experimento 2. (§ 3.) diſcimus. Quodſi enim ſcire velis, num veram altitudinem nactus fueris; immitte, intercepto interuallo aereo, tubulum ad fundum vaſis, et adtende, an aqua noua intrans ad libellam vsque aſcendat. Si enim libellam ſuperet, altitudinem quaeſitam augere, ſi infra libellam deprimatur, illam diminuere debes eousque, donec aquae nouae in tubulo, et in vaſe eadem ſit altitudo. In qua methodo tamen ante omnia certus eſſe debes, tubum, quo vteris, cylindricum eſſe.

§. 13. Venio nunc ad propoſitionem, quam *Cel. Muſſchenbroek* inuitus quidem, vti teſtatur, amplexus eſt, multisque experimentis tam in aere, quam in vacuo factis Cap. I. exp. XV. et Cap. VII. Exp. V. ſtabilire contendit; quae, ſi vera eſt, totam theoriam noſtram plane euertit. Cum igitur mea plurimum interſit ſcire, vtrum vera ſit illa, nec ne? nemo mihi vitio vertet, ſi paullo attentius in rei veritatem inquiram. Propoſitio autem iſta ad hanc fere ſententiam redit: *Quo tubi vitrei maiorem longitudinem habent; eo quoque altius aquam in ſe rapiunt.* Vnde concludit, cauſſam eleuantem per totam tubi longitudinem eſſe diffuſam, et quo longior tubus ſit, eo plus virium eleuantium adeſſe. Experimenta quidem, e quibus *Cel.* Auctor theſin ſuam elicuit, adeo ſollicite ac circumſpecte inſtituta eſſe teſtatur, vt de illorum rectitudine dubitandi locus plane nullus relictus eſſe videatur, idque eo magis, quod omnino in experimentando habitum ſibi adquiſiuerit, et vbique ſingularem dexteritatem oſtenderit.

Inte-

Interim tamen a me impetrare nondum potui, vt proptea thefin illam amplecterer, et propoſitionem contrariam, qualis ex theoria noſtra ſequitur, deſererem ſequentibus argumentis munitam. Tabula XI.

§. 14. Et *primo* quidem abſit, vt de experimentorum fide dubitem; neque etiam *Cel.* Auctorem alicuius *praecipitantiae* arguam. Sed eandem gratiam viciſſim peto et mihi et aliis, qui contrarium ſtatuunt. Nulla enim ratio eſt, quare aliis mihiue, qui itidem experimentando rem adgreſſi ſumus, minorem fidem habeam, quam *Cel.* Auctori. Hoc enim eſſet auctoritatibus pugnare, ſi vnus ſibi ſoli fidi poſtularet. Docent autem non ſolum experimenta *Carreana*, longitudinem tubi ad altitudinem aquae nihil conferre; ſed etiam *Exc. Bülſingerus* repetitis ſollicite experimentis idem deprehendit, et contra *Sturmium* annotauit in Diff. ſua §. IV. 3. Ipſe ego denique non ſemel, ſed vicibus multoties repetitis, cum tubis non aliquot pollices ſed tres et quatuor pedes longis tentamina feci, neque quicquam diſcriminis, obſeruatis neceſſariis cautelis, deprehendi. Ita, e. gr.

I. Sumſi tubum capillarem, cuius orificii diameter erat 0, 1. lin. attrahebatur aqua, quando orificium inferius aquam in vaſe lambebat, ad altitudinem 5. pollic. 4. lin. Altitudo tubi vacua ſupra aquam erat 8. poll. 8. lin. Abſtuli 4. pollices ſine concuſſione notabili, vnde aqua ad eandem altitudinem ſubſtitit. Euacuatum tubum denuo admoui ad vaſculum, vnde aſcendit ad eandem altitudinem. Abſtuli denuo pollices duos, et quieeuit aqua porro ad eandem altitudinem. Euacuatum tubum tertia vice im- *Exper. 6.*

Tabula XI. pleui eadem methodo ad altitudinem eandem. Abſtuli tertio pollices duos; et ſemper eadem altitudo conſeruata fuit.

Exper. 7. II. Tubi capillaris diameter erat 0,1. linearum; altitudo totalis erat 19. poll. 2,3. lin. Methodo priori adhibita, aqua aſcendit ad 5. pollices, 2,5. lineas. Abſtuli portionem tubi, vt altitudo vacua ſupra aquam eſſet 10. poll. 6,8. lin. quo facto aqua ad eandem altitudinem quieuit. Euacuaui tubum et denuo impleui, vnde aqua ad priſtinam altitudinem aſcendit. Abſtuli iterum 5. poll. 6,8. lin.; vt longitudo tubi ſupra aquam eſſet 5. poll. ſed altitudo aquae non mutabatur. Tubulo iterum euacuato, et denuo impleto, aqua iterum ad primam altitudinem 5. poll. 2,5. lin. aſcendit.

Cui bono autem, eadem phaenomena ad nauſeam repetere? *Primum* igitur argumentum meum ab experientia immediata deſumtum *demonſtrat*, *diuerſam tubi longitudinem altitudines*, *ad quas aqua in illo aſcendit*, *neutiquam mutare*.

§. 15. *Alterum* argumentum itidem experientia nobis ſuppeditat, quod in phaenomenorum analogia conſiſtit. Eſt nimirum idem illud experimentum, quo (§. 2.) oſtendimus, ſemper eandem manere altitudinem aquae eleuatae ſupra libellam, quousque licet tubulus immergatur. Hoc verum eſſe agnouit ipſe *Cel. Muſſchenbroek* in Exp. IV. quo dixit: „Tubulum, in quo aqua aſcendit ad altitudinem „20. linearum, dum ſuperficiem aquae lambebat, eundem „profundius immiſſum recepiſſe in ſe aquam ad eandem a „ſuperficie altitudinem, vt antea.„ Quodſi igitur in tubo ſiue parum ſiue profundius immiſſo aqua ad eandem altitudi-

tudinem ſupra libellam aſcendit: ſequitur omnino, *longitudinis diuerſitatem ad eleuationem nihil conferre.*

§. 16. *Tertium* denique argumentum conſideratio experimentorum *Muſſchenbroekianorum* ſuppeditat, quod *nulla proportio ſeruetur inter longitudines tubi et altitudines aquae*; dum iuxta illa non ſolum duo diuerſae longitudinis tubi aliquando aeque excelſe aquam eleuent, ſed etiam idem tubus diuerſae longitudinis aquam ad eandem aliquando altitudinem attollat; quae quidem inconſtantia ab ipſo *Cel.* Auctore agnita totam rem quam maxime ſuſpectam reddit, et non ſine probabilitate coniicere iubet, iſtam altitudinis diuerſitatem a negotio quodam alieno potius quam a variata tubulorum longitudine deriuari debere.

§. 17. Quibuscunque igitur hanc propoſitionem (§. 13—16.) denuo ad examen reuocare aliquando placuerit, iis ſuaſor ſum, vt ante omnia *de captandis veris altitudinibus* ſolliciti ſint, atque ad facienda tentamina tubulos potius anguſtiores, quorum diametri 0,1. vel 0,2. lineas vix excedunt, quam ampliores eligant, quia in illis error facilius detegitur. In implendis autem tubis iſtis anguſtioribus plane non exſpectandum eſt per 12. horas vel integrum nychthemeron; ſed, quando aqua altitudinem debitam quam proxime attigit, tubulus aliquanto profundius immergatur, vt aqua vlterius aſcendat, tumque iterum extrahatur ita, vt oſculo ſuo ſuperficiem fluidi in vaſe lambat; quo facto cylinder aqueus intra tubum breui tempuſculo ad iuſtam et quaeſitam altitudinem ſubſidet. Quando tubus ex aqua extrahitur, attendatur, vt ſemper aequalis guttula extremitati inferiori adhaereat. In decur-

tando tubo opera danda eſt, vt per fractionem ſuccuſſio quam minima fiat. Ad ſcopum obtinendum quidem non opus eſt euacuatione tubi et noua repetita repletione, quia etiam poſt decurtationes ſatis obſeruari poteſt, num aqua ad minorem altitudinem ſubſidat. Si cui tamen iſta methodus placuerit, fateor me non probare poſſe, vt exſugendo rem adgrediaris; quia hoc modo vix euitari poteſt, quin ſenſim aliquid ſaliuae adhaereat, qua poſtmodum tam vitri quam aquae puritas multum turbatur. Praeſtat, vel linteo puro aquam ſenſim auferre, vel quemadmodum *Cel. Krafftius* noſter in Exper. Phyſ. pag. 57. 58. fieri docet, alium tubulum anguſtiorem vacuum oſculo inferiori admouere, qui mox omnem aquam extrahet et reſorbebit.

§. 18. Reſtat denique ſcrupulus remouendus, quem experimentum *Muſſchenbroekianum* ſeptimum Cap. I. nobis iniicit. Illud autem tale recenſetur: „Si tubulus conti-„ nens 20. lineas aquae in ſe, ex vaſe ſublatus lente incli-„ netur, vt parallelus horizonti euadat: tum aqua in tubo „ mouebitur ab vno extremo verſus aliud, ita tamen, vt „ occupet accurate mediam tubi partem, relinquatque am-„ bas extremitates vacuas aqua, et tantum aere plenas.„ His poſitis aut in experimento latet hallucinatio, aut theoria noſtra falſa eſt. Haec enim poſtulat, vt, quando inclinato vtcunque tubo cylinder aqueus ab orificio inferiore paullum receſſerit, peripheria vtrique cylindri extremitati proxima vi ſua attractiua aequaliter agat, et conſequenter propter peripheriam inferiorem cum pondere cylindri conſpirantem hic ipſe non aſcenſum ſed deſcenſum affectet. Quando igitur tubus tandem horizonti parallelus poneretur,

tur, aqua non niſi per ſaltum, cuius nulla eſſet ratio, Tabula XI.
mediam tubi partem occupare poſſet. Huic conſequentiae porro fauet experimentum *Muſſchenbr.* inſequens octauum; iuxta hoc enim, „ſi extremum eiusdem tubi, quod aquae,, immerſum fuit, altius eleuetur ſupra horizontem, infra,, quem quem deprimatur extremum alterum: tum aqua de-,, ſcendit verſus humilius extremum motu concitato.,, Quodſi igitur in hoc caſu aqua intra tubum inclinatum deſcendit: quare in caſu priore, in quo tamen circumſtantiae eaedem ſunt, aſcendit? Sed quicquid horum ſit, confugiamus ad experientiam optimum veritatis indicem. Haec autem ita ſe habet: Si tubus, qui aquam ſufficientem attraxit, incli- Exper. 8.
netur: aqua attracta CD paululum ab orificio inferiore Figura 12.
recedit, quo facto, *quomodocunque tubum inclinaueris*, *aqua in eodem ſitu* CD *immota haerebit*; *etiamſi tubum horizontaliter poſueris.* Quodſi vero orificium B ſupra horizontem vel parum eleuetur, aqua CD mox deſcendit ad orificium alterum A, et aeque parum diſtat ab illo, donec tubus perpendiculariter erigatur; tunc enim ad ipſam oram plane deſcendit. Ex quo phaenomeno rite percepto Theoriae noſtrae vim nullam inferri clariſſime apparet.

§. 19. Pergo ad illa phaenomena, quae obſeruantur in *tubis diuerſae diametri*, quorum explicatio genuina, non neglectis eis quae theoria poſcit, ſequenti potiſſimum propoſitione nititur: *In tubo anguſtiori particula aquea a pluribus punctis vitreis reſpondentis peripheriae ſimul attrahitur, quam in tubo ampliore.* Sit enim ſemidiameter Figura 13.
tubi $AC = a$, radius actiuitatis vitri $AB = PT = Pt = b$, diſtantia particulae attrahendae a peripheriae attrahentis pun-

cto

Tabula XI. cto AP $= x$, $=$ AZ $= z$: erit AT $= \sqrt{bb-xx}$, ZP $= x-z$, ZC $= a - Z$, Zt $= \sqrt{bb-(x-z)^2}$; Porro AZ : Zt $=$ Zt : ZC + AC; vnde $Zt = \sqrt{2az-zz} = \sqrt{bb-(x-z)^2}$, $2az-zz = bb-xx+2xz-zz$, $2az-2xz = bb-xx$, $z = \frac{bb-xx}{2a-2x}$. Eſt autem AZ : At $=$ At : 2AC, vnde $\overline{At}^2 = \frac{a(bb-xx)}{a-x}$ et $\overline{AT}^2 = bb-xx$; Ergo $\overline{AT}^2 : \overline{At}^2 = bb-xx : \frac{a(bb-xx)}{a-x}$; et AT : At $= \sqrt{a-x} : \sqrt{a}$. Atqui recta At eſt chorda arcus At, et maior quam recta AT; ergo et ipſe arcus At maior erit quam AT. Sint igitur duo tubi, ſemidiameter vnius A maior $= a$, alterius B minor $= \alpha$; erit chorda At in A ad chordam in B $= \sqrt{\frac{a(bb-xx)}{a-x}} : \sqrt{\frac{\alpha(bb-xx)}{\alpha-x}}$; et quando diſtantia x conſtans ponitur $= \sqrt{\frac{a}{a-m}} : \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-m}}$ et quadrata chordarum $= a\alpha - am : a\alpha - \alpha m$. Ergo, quia rectangulum $a\alpha = a\alpha$, et $am > \alpha m$; ſequitur chordas illas, et conſequenter ipſos arcus peripheriarum attrahentium maiores eſſe in tubo minore quam in maiore; nimirum: Quadrata chordarum ſunt in ratione compoſita directa radiorum et reciproca differentiarum inter radium et diſtantiam puncti attrahendi. Ergo *ad eandem particulam aqueam, quae in eadem diſtantia poſita eſt, attrahendam plura puncta peripheriarum reſpondentium vim ſuam exerunt in tubo anguſtiore, quam in ampliore.*

§. 20. Cum igitur eadem peripheriae portio in circulo minore minus attrahat aquae, quam in maiore (Tentam. Prop. XXX.): et eadem particula aquea a pluribus punctis vitreis ſollicitetur in tubo anguſtiore quam ampliore
Exper. 9. (§. 19.): neceſſario *aqua multo velocius ſurſum rapitur in tubo anguſtiore quam in ampliore.* Vnde huius phaenomeni

meni ab omnibus, qui circa hanc rem verſati ſunt, obſeruati ratio ſufficienter patet. Tabula XI.

§. 21. *Quando* igitur *eadem gutta aquea a duabus peripheriis inaequalis diametri ſollicitatur*: *mouebitur illa potius verſus peripheriam diametri minoris*, *quam verſus alteram.* Ab hac cauſſa dependet phaenomenon ſequentis experimenti. Sit tubus inaequalium diametrorum AB. *Exper.* 10. Confluat in confinio vtriusque diametri guttula aliqua *ab* Figura 14. ex reliquiis aquae non ſatis euacuatae: videbis, in quocunque ſitu inclinato tubus ſeruetur, guttulam iſtam ſumma velocitate verſus *a* rapi. Quando erigis tubulum, vt pars Figura 15. anguſtior A*a* ſurſum ſpectet, guttula in aliquo loco *ab* immota haerebit. Contra vero, quando tubulum inuertis, Figura 16. vt pars amplior *b*B ſurſum ſpectet, guttula *ab* adeo non ſurſum eleuatur verſus B, vt potius verſus A deſcendat, quia in hoc caſu ponduſculum guttulae cum actione fortiori peripheriae anguſtioris conſpirat.

§. 22. *Sequitur* etiam ex hoc experimento (§. 21.), *in tubo inaequalis diametri peripheriam anguſtiorem ſuſtinere poſſe aquam ad altitudinem maiorem*, *quam peripheria amplior.* Suſtinet enim peripheria *a* aquam ad altitudinem *ab*, quam peripheria *b* ad eandem altitudinem Fig. 15. 16. ſuſtinere non poteſt; quia in hoc caſu ſollicitationes ad aſcenſum minores ſunt, quam in illo.

§. 23. Huc pertinent bina experimenta *Iuriniana* (*) *Exper.* 11. ſeptimum et octauum, quae ita ſe habent: „Conſtet tubus„ Figura 17. CD duabus partibus, in quarum ampliore aqua ſponte aſcen-„ Figura 18.

 ſura

(*) Iac. Iurini Differt. phyſico-mathemat. I.

Tabula XI. ſura ſit ad altitudinem BF; at pars anguſtior, ſi ſatis,, longa ſit, aquam eleuatura ſit ad altitudinem CD: Hoc,, tubo aqua repleto, et oſculo C partis amplioris immer-,, ſo in aquam AB, omnis aqua tubo contenta ſuſpenditur,, ſupra libellam. Immerſo oſculo D partis anguſtioris aqua,, confeſtim deſcendit, et ſubſiſtit tandem ad altitudinem GD,, parem lineae BF,,. Cum his conſpirant eiusdem *Celeb.* Auctoris experimenta bina ſequentia, nonum et decimum, quae repetere ſuperuacaneum duco. Ex quibus omnibus *ſequitur, in tubulis conicis* vel inaequalis diametri *altitudines aquarum eſſe reciproce vti diametros peripheriae ſupremae, cui ſumma aquae ſuperficies proxime adhaeret.* Has vero ita aeſtimari debere, ex theoria noſtra prono alueo ſequitur. In menſuram enim altitudinis aquae ſuſpenſae (Prop. XXVIII.) nihil ingreditur niſi conſideratio virium ſuſpendentium, et diametri d, quatenus haec exprimit rationem peripheriae annulorum vitreorum, quibus ſuperficies aquae inter aſcendendum ſucceſſiue applicatur. Quando igitur diximus, altitudines eſſe in ratione reciproca diametrorum, id neceſſario de diametris peripheriae tubi (non inferioris aquam lambentis, ſed) ſuperioris, quam aqua aſcendendo attigit, intelligendum eſt; conſequenter *poſitis diametris hisce aequalibus altitudo etiam ſemper aequalis erit, amplitudinibus tuborum vtcunque diuerſis et inaequalibus.*

§. 24. Non autem ſufficere videtur demonſtrare ne-
Exper. 11. ceſſitatem propoſitionis. Sunt qui ſcrupulum iniiciunt, et
Figura 19. paradoxon inde deduci putant. Quaerunt enim, ſi peripheria C in tubo cylindrico ABD ſuſpendere non poteſt niſi

niſi columnulam aqueam ſub baſi BD et altitudine BC Tabula XI. comprehenſam: quare eadem peripheria in tubis conicis Figura 20. vel plus ſuſpendit, ſi baſis EF maior eſt; vel minus, ſi Figura 21. baſis HK minor eſt, quam baſis BD? Proponit eandem obiectionem, verbis paullo aliter inflexis et ad ſuas figuras accommodatis *Cel. Iurinus* l. c. Quibus rationes mechanicae ſufficiunt, iis abunde reſpondet idem *Cel. Iurinus*, dum velocitates in ratione reciproca ſectionum, et conſequenter momenta columnarum aquearum in quacunque tuborum amplitudine eadem eſſe docet. Qui autem cauſſam magis phyſicam ſcire auent, iis ex theoria reſpondebimus.

Tabula XII.

§. 25. Sit igitur tubus conicus ABCD, cuius dia- Figura 22. meter inferior maior AD, ſuperior minor BC; ſit aqua attracta ad altitudinem *b*B; dico: virtutem attractiuam peripheriae ſuperioris diametro BC reſpondentis reuera plus non ſuſtinere quam columnam cylindricam mediam *b*BC*c*; reliquam autem portionem huius coni aquei truncati, quae generatur, quando triangulum AB*b* circa cylindrum rotari concipitur, ſuſtineri a virtute alia. Conſtat enim, latus tubi obliquum AB, cuius ope aqua eleuatur, reſolui poſſe in duo alia A*a*, et *a*B, quorum illud ſe habet ad hoc, vti ſinus anguli inter latus et baſin tubi BA*b* ad coſinum eiusdem anguli. Quando autem aſcenſus ad debitam altitudinem factus eſt, tum latus verticale A*a*=B*b* munere ſuo functum eſt, atque ad ſuſtentationem porro nihil confert, ſed cylindrulus dictus a ſolo ſupremo annulo BC ſuſtinetur, quemadmodum (Tentam. Prop. XXV.) demonſtrauimus. Contra vero latus horizontale *a*B=A*b* otioſum non manet, ſed baſin annularem A*b*, *c*D format Figura 23.

 =AD

Tabula XII. $= \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2$, a qua reliqua portio obuoluta imme-
Figura 24. diate dependet. Similis ratio eſt, ſed contraria, quando tubus inuertitur, vt baſis minor BC inferior ſit; tunc enim baſis iſta annularis A*b*, *c*D, a latere *a*B generata, quae antea deſcenſum aquae impediuerat, iam illius aſcenſum moratur, et portionem inter A*a*B interceptam ad deſcenſum ſollicitat. Quapropter peripheria ſuperior AD non ſolum maſſam coni truncati aquei ABCD ſuſpendit, ſed et vim lateris horizontalis *a*B deorſum nitentem ſuperare debet, id quod eo recidit, ac ſi totus cylindrus maior A*ad*D ab eadem peripheria ſuſpendi deberet.

§. 26. Quemadmodum vero tale latus horizontale A*b* in tubis conicis nonniſi ex reſolutione lateris verticalis reſultat: ita illud reuera adeſt, quando tubus aliquis dato con-
Figura 25. ſilio hoc modo conſtruitur, qualem figura 25. exhibet, id quod executu adeo difficile non eſt. Atqui in huiusmodi tubis negari non poteſt, latera DE attrahere, ſi aqua in eius viciniam defertur; quippe videmus, guttulam a baſi tubi quacunque ſuſpendi. Quodſi igitur ſuprema peripheria tubi AF ſuſtinere poteſt cylindrulum aqueum AFG: poteſt etiam peripheria laterum DF et FE proxima ſuſtinere canaliculum, quo cylindrulus ille circumdatur, quales peripheriae tot numero eſſe finguntur, quot puncta in latere DF concipiuntur.

Exper. 12. §. 27. Atque hoc phaenomenon *non poteſt non in vacuo etiam apparere*, cuiuscunque longitudinis et capacitatis ſit tubus; modo pars ſuprema tubuli capillaris adeo anguſta ſit, vt eius peripheria altitudini reciproce reſpon-

deat.

deat. Quippe omnis res ad virtutem attractiuam tam peripheriae tubuli capillaris, quam laterum DF, FE, itemque et ad cohaeſionem particularum aquearum inter ſe reducitur; quae binae virtutes per vacuum non abolentur. Quapropter omnis illa inſignis difficultas, quae in conſiderando hoc experimento in vacuo ſe offerre videtur, (*Iur.* Diſſ. II.) plane euaneſcit. Tabula XII. Figura 25.

§. 28. Cum his experimentis (§. 25.) autem plane non confundendum eſt *aliud*, *quando* nempe *aqua* in tubo ampliore a *portione* in anguſtiore *per interiectam bullam aeream dirimitur.* Quamuis enim in hoc attractio lateris horizontalis omnino ceſſat, propterea tamen in illis neutiqam reiici debet. Quippe circumſtantiarum varietas cauſſarum quoque diuerſitatem facile admittit. In illis quidem continuitas fluidi per cohaeſionem particularum aquearum, in hoc autem per interiectum corpus aereum elaſticum efficitur. Et cum ibi ſola atmoſphaerae preſſio et attractio peripheriae ſupremae occurrit: ita hic praeter atmoſphaere preſſionem et peripheriae ſummae C attractionem, etiam attractio peripheriarum D et E, et denique aer incluſus, qui eandem cum atmoſphaera externa denſitatem conſeruat, conſiderari debent; vnde omnino explicatio longe alia emergit. Haec autem vt facilior euadat, reducamus experimentum ad caſum ſimpliciorem, qualem *Exc. Bilſingerus* (Diſſ. §. LII.) fecit. Sit tubus cylindricus AB, in quo ſuſpendatur aquae quantitas CD et EB, et ſit interiectus aer DE. Hic quidem idem illud accidit, quod ſupra (§. 3.) aſſeruimus, nimirum, *ſummam altitudinum* CD *et* EB *aequalem fore altitudini illi, ad* Figura 26. Figura 26. Exper. 5.

 quam

Tabula XII. *quam in eodem tubo aqua non interrupta aſcendere potuiſſet.* Primo enim non ſolum peripheria C portionem CD ſuſtentat, ſed etiam peripheria D, quae omnino negligi non debet, eandem ad deſcenſum ſollicitat. At vero, quia tubus cylindricus eſt, peripheriae D et C aequales ſunt; ergo vis, qua vtraque aquam attrahit, etiam aequalis eſt, et vna alteram niſu contrario deſtruit. Porro atmoſphaera quidem tota grauitate ſua ſuperficiei C incumbit, ſed effectus per eiusdem atmoſphaerae actionem reciprocam in ſuperficiem B itidem deſtruitur. Solum igitur pondus portionis CD reſtat, cuius grauitate portio EB, mediante interiecta bulla DE, deorſum premitur. Cum vero portio BE tanta non ſit, quantam peripheria E, aequalis peripheriae B, ex hypotheſi attrahere poteſt: ergo exceſſu virtutis huius reliqua portio CD, tamquam altitudinis debitae complementum, ſuperabundante peripheriae illius virtute ſuſtinetur. Inde *clarum eſt, experimentum in vacuo ſuccedere non poſſe.* Si enim tum bulla aerea deficit: nihil eſt, quod effectum grauitatis ponduſculi CD moretur; haec igitur portio in vacuo deſcendit, donec cum portione altera EB coniungatur. Si vero bullam etiam ſub recipiente vacuo incluſam ponas, haec elatere ſuo vtramque portionem aquae accumbentem disiiciet; et experimentum plane irritum reddetur.

Exper. 13. §. 29. Applicemus hanc explicationem ad caſum magis compoſitum, quando nempe tubulus non eiusdem Figura 27. vbique capacitatis eſt. Sit talis tubus AB, portio aquea ſuperior in tubulo anguſtiore CD, portio inferior in tubo ampliore EB, bulla aerea interiecta DE. Sit altitudo, ad

ad quam peripheria C aquam attollere poteſt, $=FG$; altitudo peripheriae D reſpondens $=HG$; altitudo peripheriae E reſpondens $=HI$. Hoc tubo ita impleto, portio CD ſollicitatur a diuerſis viribus contrariis, a peripheria C ſurſum; a peripheria D autem, itemque a preſſione atmoſphaerae cum proprio ponduſculo conſpirante deorſum. Quodſi iam vires peripheriarum C et D aequales eſſent: idem accideret, quod in exemplo antecedente (§. 28.); et portio CD ſolo ponduſculo ſuo, et preſſione atmoſphaerae, verſus ſubiectam portionem EB, mediante bulla, vrgeretur. At vero, quod rectiſſime indicauit *Cel. Iurinus*, iſtae peripheriae aequales non ſunt, quia ſuperior tubulus AD inter fabricandum plerumque figuram conicam nanciſcitur. Attractio igitur peripheriae C per alteram D non tota deſtruitur, ſed virtus eius adhucdum tanta eſt, vt poſſit aquam ſuſtinere ad altitudinem FH, aequalem differentiae altitudinum, binis iſtis peripheriis reſpondentium FG et HG. Iam vero peripheria C actu non ſuſtentat niſi portiunculam CD ad altitudinem FK; ergo reſtat virtus, aequalis altitudini KH. Non ſolum igitur portio CD ponduſculo ſuo in portionem EB ſubiectam non premit, ſed nec Atmoſphaerae pondus ſuperficiei C incumbens preſſionem ſuam totalem in eandem portionem EB ſolam libere exercet, quia ſuperare etiam debet eandem reſtantem virtutem attractiuam peripheriae C ad altitudinem KH. Quodſi igitur euenire debet, vt aequilibrium oriatur inter preſſionem atmoſphaerae imminutam et partialem, qua portio EB, mediante portione CD et bulla DE, deorſum vrgetur, et inter eiusdem atmoſphaerae preſſionem totalem et liberam, qua in ſuperficiem B reagitur: neceſſario in

Gg

Tabula XII. ſubſidium vocari debet pondus cylindri aquei altitudinis KH, quod virtuti iſti reſtanti aequipollet, et ſimiliter deorſum nititur. Ad conſeruandum igitur aequilibrium portionis EB altitudo aequalis eſſe debet ſummae altitudinum KH et HI = KI; ſiue: *ſumma altitudinum vtriusque portionis* CD et EB = FK + KI *aequalis erit ſummae* FI *ex altitudine* HI, quae peripheriae E competit, *et ex differentia altitudinum* FH, peripheriis C et D reſpondentium; ſiue: vti *Cel. Iurinus* expreſſit, *altitudini peripheriae* C *totali* FG, *demta differentia altitudinum peripheriis* D *et* E *reſpondentium.*

Figura 27. Exper. 14. §. 30. Quodſi igitur altitudo cylindri aquei CB maior eſt altitudine KI, ille deſcenſum continuat, donec ad debitam altitudinem conſiſtat; quae admodum variare poteſt, pro varia differentia peripheriarum C, D et E. Poſita enim peripheria C eadem, quando D = E fuerit: erit ſumma altitudinum vtriusque portionis CD et EB, aequalis altitudini totali FH + HG, q = FG, quia tum erit HI = HG. Quando autem peripheria D imminuitur, vt aequalis fiat peripheriae C; quod accidere poteſt, quando tubulus capillaris AD non conicus ſed cylindricus eſt: tunc harum binarum peripheriarum virtus mutuo deſtruitur; portio igitur CD et atmoſphaera incumbens grauitate totali in ſubiectam portionem EB agunt, cuius pondere addito reactio atmoſphaerae in baſin B neceſſario ſuperatur. In hoc caſu igitur aqua EB non ſuſtentatur, ſed deſcendit, donec FI = HI fiat, quod etiam euenit, quando portio CD plane aboletur. Haec omnia cum experimentis egregie conueniunt, quando pro iis captandis tubus ſatis longus adhibetur, vt nunc portio CD nunc EB augeri minuiue poſſit.

§. 31.

§. 31. Ex genuina huius phaenomeni explicatione Tabula XII.
(§. 29.) allata *apparet, illud in vacuo ſuccedere non poſſe.* Nulla enim tum erit atmoſphaerae preſſio in ſuperficiem Figura 27. C et E. Vis igitur peripheriae C ſola tanta eſt, vt non ſolum deſtruere poſſit vim peripheriae D reagentem, ſed et ſimul ſuſtentare portionem CD, ne deſcendat, quemadmodum (§. 21.) dictum eſt. Peripheria autem E tantae virtutis non eſt, vt portionem aquae attrahere poſſit ad altitudinem EB = KI; neque preſſio atmoſphaerae adeſt in baſin B agens. Quapropter in vacuo, deficiente Exper. 15. bulla DE, portio CD in ſitu ſuo conſeruabitur, portio autem EB grauitate ſua deſcendet eousque, donec ad altitudinem HI, peripheriae E conuenientem haereat. Atque ex his binis exemplis (§. 28. 29.) luculenter patet, preſſionem aeris negligendam non eſſe, ſed in explicatione horum effectuum phyſica omnino attentionem mereri. Videlicet in iis ſolis caſibus negligi poteſt, in quibus non tam preſſio, quam applicatio preſſionis vtrinque aequalis eſt, vt ſemper aequaliter in ſe inuicem agere, et ſe mutuo deſtruere poſſit, quod idem eſt ac ſi plane non ageret; id quod fit, quando ex. gr. aqua in tubo continua eſt; tunc enim eadem oriuntur phaenomena, ſiue experimenta inſtituantur in aere, ſiue in vacuo (§. 27.). Quando autem portiones diremptae ſunt: phaenomena longe alia manifeſtantur in vacuo, quam in aere; Et quidem, quando in vacuo etiam bulla aeris ipſa deficit, denuo alia accidunt in tubo cylindrico (§. 28.), alia in tubo inaequalis diametri, vt paullo ante diximus. Quando autem Exper. 16. tubum ſiue cylindricum, ſiue inaequalis amplitudinis, in quo portiones interpoſita bulla diremptae ſunt, in vas re-

Tabula XII. cipiens includis, et aerem circumquaque exhaurire ſatagis: bulla iſta, quae prius eiusdem elateris cum aere externo fuerat, extenditur, et portiones aqueas vtrinque accumben-
Exper. 17. tes ſimul extra tubum expellit. Quando denique tubum, ſiue aequalis ſiue inaequalis diametri, aqua intus ſiue continua ſiue per bullam diremta, ita ad vas recipiens adaptaueris, vt alterum extremum gracilius extra illud promineat; atque aerem recipientis exhaurire adgrediaris: atmoſphaera exterior portionem DC adeo vrget, vt illam mox detrudat et perrumpat, ipſaque per tubum viam patulam in recipiens ſibi ſternat.

§. 32. Reſtant bina experimenta *Muſſchenbroekiana* Cap. IV. Exp. X. XI. quae huic negotio obſtare videntur. Quia vero per meam experientiam omnia *alia* edoctus ſum; non duxi, neceſſarium eſſe, vt illis enodandis diutius immorarer.

§. 33. Progredior ad *ſiphones*, ſiue ad *tubos* vario modo *inflexos*, qui plura phaenomena in admirationem rapientia produxerunt. *Alia* enim oriuntur, quando ſiphonem vacuum implere velis per attractionem; *alia*, quando illum quomodocunque repletum teneas in aere; *alia* denique, quando altero oſculo tangas aquam in vaſe. In quibus omnibus explicandis variatio cauſſarum, illarumque applicatio quam maxime attendi debet, quae ſunt 1. *vis attractiua* peripheriarum, quas aqua intra tubum attingit, 2. *preſſio atmoſphaerae*, quae hiſce caſibus plurimum ſe immiſcet, et 3. *pondus aquae*; ex quibus varie combinatis nunc quies nunc motus producitur, quemadmodum ſequentes regulae docebunt.

RE-

REGVLA GENERALIS. Tabula XII.

§. 34. *Sit ſipho plenus* ABC, *cuius crura diffe-* Figura 33. Fig. 35. 36.
rant longitudine et diametro quomodocunque; quando diffe-
rentia crurum aequalis eſt vel minor altitudine, ad quam
aqua eleuari poteſt virtute attractiua peripheriae, quae
aquam inter mouendum dimittere deberet: nullus erit mo-
tus, ſed aqua intus in ſiphone quieta haerebit. *Quando*
differentia crurum maior eſt iſta altitudine, aqua effluet per
crus longius. In ſiphone ampliore ACDB ordinario aqua Figura 28.
effluit per crus longius, quaecunque ſit crurum differentia; propter aequilibrium virium, queis quaeuis columna AC et BD deſcendere et per oſcula A et B effluere nititur, a pondere exceſſus columnae EA ſuperatum. Praeter pondera enim columnarum iuncta cum preſſione atmoſphaerae vtrique orificio A et B incumbentis nulla alia vis hic locum habet; nihil igitur eſt, quod aſcendentem columnam DB impediat aut retardet. At vero in tubo capillari attractio peripheriae e. gr. *b* aſcendentem columnam *b*D ad deſcenſum ſollicitat, qui niſus a pondere columnae EA ſuperari debet. Quando igitur attractio peripheriae *b* tanta eſt, vt columnam aqueam ſuſtinere poſſit ad altitudinem EA: nullus erit motus; aequiponderant enim vtrinque, praeter atmoſphaeram, columna CE et DB, itemque columna EA et vis peripheriae oſculi B, vel *b*. Si columna EA minor eſſet altitudine requiſita: ſimiliter foret quies, et effluxus adeo non ſequeretur per oſculum A, vt potius prolongato tubo in Bβ columna cruris DB deſcenſura eſſet. Quando denique differentia crurum altitudinem iſtam excedit, vt attractio peripheriae B conſumatur ſuſtinenda columna e. gr. E*a*: tunc portio reliqua *a*A ſibi relicta et a nulla re im-

Tabula XII. pedita proprio pondere deſcendit et effluit; cum vero ſemel effluxus incepit, ille continuatur, quia differentia columnarum CA et D*b* ſemper augetur.

§. 35. Ex hac regula *generali* (§. 34.) ſequuntur *leges* pro *caſibus ſpecialioribus*.

I. Pro effluxu, quando ſiphonis repleti crus alterum aquae in vaſe admouetur.

1. *Quando oſculum cruris breuioris aquam in vaſe lambit, haec ſemper effluit per orificium cruris longioris; quomodocunque differant crura longitudine vel diametro.*

Figura 28. Quando enim contactus fit: actio peripheriae B in columnam DB ceſſat, quia facto motu ſemper noua aqua a preſſione atmoſphaerae ſuggeritur. Nihil igitur eſt, quod columnam EA ſuo pondere deſcendere nitentem ſufflaminet; et res ad eum caſum rediit, ac ſi ſipho ex tubis non capillaribus conſtaret. Quapropter effluet aqua ex crure longiore; quaecunque crurum differentia fuerit.

2. *Quando orificium cruris longioris aquam lambit: haec non effluit verſus vas, niſi differentia crurum maior fuerit altitudine, quae peripheriae cruris breuioris competit.*

Contactus enim in hoc caſu nullam mutationem cauſſarum affert; et effectus omnis dependet a reciproco conatu columnae EA et attractionis peripheriae cruris breuioris, quam aqua deſerere deberet, dum per crus alterum in vas effluxura eſſet. Redundante igitur columnarum differentia, ſequitur effluxus: praeualente autem attractione peripheriae, erit quies (§. 34. Reg. Gen.).

3. *Quan-*

3. *Quando aqua effluit; effluxus ſemper ſit per orificium cruris longioris; quodcunque orificium ſuperſiciem aquae in vaſe lambat.* Tabula XIII

Nam effluxus dependet a praeualente differentia columnarum aquearum.

II. Pro replendis ſiphonibus vacuis.

1. *Sit Sipho, crurum diametro aequalium, et longitudinis cuiuscunque; ſit autem crus, cuius oſculum aquam lambit, breuius quam altitudo ad quam peripheria interna aquam ſucceſſiue eleuare poteſt: in tali ſiphone aqua per admotum crus aſcendet, et pergendo in altero deſcendet, donec totus tubus ſit impletus. Quando crus alterum breuius eſt crure admoto, aqua quieſcet; quando longius eſt, effluet.* Figura 29.

Quando enim aqua per C ad D transiit: differentia columnarum aquearum A C minor eſt altitudine quam peripheria D ſuſtinere poteſt, ex hypotheſi. Deſcendit igitur aqua verſus B, quia manente eadem peripheria differentia iſta continuo decreſcit; et poſtquam crus repletum eſt, aqua vel effluit ex B vel quieſcit (§. 34. et 35. I. 1. 2.).

2. *Sint omnia, vt ante, ſed crura diametro inaequalia: In crure anguſtiore aqua quidem aſcendet; ſed poſtquam ad D peruenit, quieſcet, ſi differentia columnarum A C maior fuerit, quam a peripheria cruris amplioris ſuſtineri poſſit. Quando autem aqua per crus amplius aſcendit, crus alterum anguſtius totum replebitur, vel quieſcente poſtmodum aqua vel effluente, pro ratione longitudinis A C.* Figura 30. Figura 31.

Tabula XII. In primo enim caſu, quando velis, vt aqua porro deſcendat, actio peripheriae D a columnae pondere AC ſuperaretur, et fieret in deſcenſu aſcenſus, quod eſt abſurdum. In altero caſu peripheria C differentiam BD ſubſtinere poteſt ex hypotheſi, ergo crus anguſtius repletur, quia differentia continuo minuitur. Cetera ſe habent, vt (I. 1. 2. II. 1.).

§. 36. Atque ex his regulis (§. 34. 35.) omnia phaenomena, quae in experimentis Clariſſimorum virorum *Hauksbeyi*, *Iurini*, *du Fay*, *Muſſchenbroekii*, et aliorum occurrunt, facillime ſolui poſſunt; id quod aliquibus exemplis commonſtrare non inutile erit.

Exper. 18. Figura 32. „§. 37. Ex. gr. Differt. *Iurin.* Exp. 1. 2. Sit „ſipho capillaris ABFC, conſtans cruribus duobus longi-„tudine et diametro inaequalibus. Aſcendat in longiore „et anguſtiore AB, ad altitudinem AB; in crure breuiore „autem et ampliore BC non niſi ad altitudinem FC. „Ex tali ſiphone repleto aqua effluit per orificium A, „et relicto crure BC vacuo, in altero crure ſuſpenditur „ad altitudinem AB; ſiue oſculum A aquam in vaſe lam-„bat, ſiue ſupra illam extollatur: ſi differentia crurum AG
Exper. 19. „maior fuerit altitudine FC. Si minor fuerit differentia, „in neutro caſu effluit.

Ratio abunde patet ex §. 35. *I. reg.* 2. *et* §. 34. *Reg. Gen.*

§. 38. Eadem experimenta repetit *Cel. Muſſchenbroek* Cap. VI. Exp. I. II. cuius primi phaenomenon tamen diuerſum putat a ſuo experimento Cap. V. Exp. X. quod

quod ita ſe habet: „Sit ſipho bicruralis ABGFC, cuius *Exper.* 20.
„crus FC ſit 4. lin. GA, 6. lin. Imponatur crus lon- Figura 33. Tabula XII.
„gius AG aquae et breuius crus FC extra eam promi-
„neat, aſcendet aqua ſurſum, ſuperat flexuram FG, deſcen-
„ditque vsque ad oram breuiorem C, ad quam haerebit,
„nulla effluente gutta.„ At vero, non mirandum eſt,
eſſe phaenomena diuerſa, cum diuerſum experimentum ſit.
Agitur enim in iſto capite V. de *tubis vbiuis aeque latis*,
et tacite ſupponitur, crus GA, etſi longius, *breuius* tamen
eſſe, *quam altitudo* requirit, ad quam aqua *ſua ſponte*
in illo eleuaretur. Cum igitur peripheria oſculi C aquam
ſuſpendere poteſt ad altitudinem cruris longioris GA: poteſt
etiam eadem diameter illam ſuſpendere ad altitudinem
BA, quae eſt differentia crurum. *Accidit igitur, quod
regula noſtra* II. 1. (§. 35.) *requirit*; nec experimentis
Iurinianis contradicitur.

§. 39. Cum binis experimentis (§. 37.) congruunt *Exper.* 21.
„tria *Iuriniana* ſequentia. Exp. 4. Sit ſipho ABFC in Figura 34.
„quo aqua aſcenſura eſt ad altitudinem CF, ſi oſculum C
„aquam attingit. In tali ſiphone repleto ſi oſculum C at-
„tollatur ſupra aquam DE, aqua ſuſpendetur in ſiphone,
„niſi differentia crurum BA maior ſit altitudine FC„. *Ratio
patet ex regula generali* (§. 34.).

„Exp. 11. Sit ABC ſipho eiusmodi, in cuius crure *Exper.* 22.
„breuiore et anguſtiore AB ſuſtineri poſſit columna aquea Figura 35.
„altitudinis EF, ſi quidem iſtud crus ea longitudine fuerit;
„at in crure longiore et ampliore BC aqua ſuſpendi ne-

queat

Tabula XII. „queat ſupra altitudinem GH; ſi repletus iſte ſipho eo ſitu „tenetur, quem exhibet figura, non effluet aqua ex C aper- „tura cruris longioris, niſi DC, differentia duorum crurum „AB, BC ſuperet altitudinem FE„. *Plane, vti docet regula generalis* (§. 34.).

Exper. 23. Figura 36. „Exp. 12. Si crus anguſtius BC longius fuerit crure AB „(poſitis altitudinibus EF et GH reſpectiuis iisdem); effluet „aqua per oſculum C, ſi differentia crurum DC maior ſit „altitudine GH: aliter tota aqua ſuſtinebitur„. *Fundatur eadem regula generali* (§. 34.).

Quae cum vera ſint, neceſſario bina experimenta *Muſſchenbroekiana* Cap. V. Exp. VIII. et Cap. VI. Exp. III. corruunt, in quibus aſſeritur: „aquam non effluere ex oſcu- „lis crurum longiorum, quamuis differentiae crurum ex- „cedant longitudinem attractioni cruris breuioris compe- „tentem„. Cuius contrarietatis cauſſam exinde natam eſſe ſuſpicor, quod in repetitione experimenti *Iuriniani* vndecimi loco vocis, *niſi*, particula *quamuis*, poſita fuerit: id quod feſtinanti calamo facile accidere poteſt. Vnde etiam praetenſa ejus explicatio ceſſat.

Figura 34. *Exper.* 24. §. 40. Exp. *Iur.* 5. „Sint omnia, vt ante (§. 39. „Exp. 4.) vbi oſculum C vel minimum immergitur in „aquam: illico aqua guttatim cadit ex orificio A, etiamſi „AB multo minor ſit altitudine FC„. *Rationem ſuppeditat regula* I. 1. (§. 35). Rectiſſime igitur erroris a *Iurino* arguitur *Hauksbejus*, qui „aquam non effluxuram putat „ex oſculo A, niſi altitudo BA ſuperet altitudinem CF. Confer, ſi placet, duo experimenta *Muſſchenbr*. Cap. V. Exp. VII. et Exp. IX. ſibi contrariantia.

§. 41.

§. 41. Exp. *du Fay*. I. In tubi recurui BAC crure capillari A*a*C aſcendit aqua ſupra libellam ad altitudinem A*a*. Cum idem tubus in ſitum ſiphonis inuerteretur: aqua effluxit ex cruris longioris oſculo C; plane, vti leges ſiphonis communes expoſcunt. Tabula XII. Figura 37. Figura 38. *Exper.* 25.

Deſcendit enim ex *a* verſus C, non ſolum, *quia columnula* A*a* pondere ſuo *deorſum nititur*, ſed etiam, *quod attractio* peripheriae *a fortior* eſt, quam attractio peripheriae B (§. 19. 21.). *Effluxit* autem, *quia* ſine dubio attractio pheripheria B tanta non erat, vt columnam A*a*C ſuſpendere poſſet ad altitudinem AC (§. 34.).

II. In ſitu primo (fig. 37.) Columna A*a* flando deprimebatur paulum infra libellam AB, vsque ad *cb*, vt columna aquae altior eſſet in crure ampliore. Quo facto, et ſiphone denuo inuerſo (fig. 38.) motus aquae iterum determinabatur verſus oſculum C cruris anguſtioris, columnulam breuiorem continentis; et nihil effluebat ex crure ampliore, niſi columnula A*a* tantum deprimebatur infra libellam, quantum prius ſteterat ſupra libellam, vt eſſet A*a*=A*α*=B*β*. *Exper.* 26

Quando columna aquea in crure capillari parum deprimitur infra libellam, ad altitudinem A*c*: differentia columnarum B*b* minor erit altitudine A*a*, ad quam peripheria *c* aquam ſuſpendere poteſt. Omnes enim peripheriae tubi capillaris *α*AC aequales ſunt. Deſcendit igitur aqua in crure AC, quia non ſolum peripheria *c* niſum ponduſculi B*b* impedit, ſed etiam fortius agit quam peripheria B, huiusque attractionem deſtruit (§. 35. II. §. 19.). At vero, quando A*α*=A*a* erit: virtus peripheriae *α* ſuſpenſione columnae B*β* tota conſumitur; quae conſequen- Fig. 37. 38.

 ter

Tabula XII. ter deſcendit reſtante virtute attractiua peripheriae B; tumque effluit ex oſculo D, quia columna Dβ, continuo augetur (§. 34.). *Nulla igitur re, praeter iuſtam comparationem attractionum peripheriarum a α* et B, *et ponderis differentium columnarum* A*a* Bβ et Dβ, *itemque preſſionis atmoſphaerae in ſiphonis oſcula* C et D *ad explicanda haec phaenomena opus eſt.*

Exper. 27. Figura 39. §. 42. Non reticendum denique mihi videtur *elegans* experimentum *Celeb. Muſſchenbroekii* Cap. V. Exper. V. ,,Tubum inflexit in formam ABCGDFK, ita, vt curua- ,,tura ſuperior D eſſet altior, quam extremitas A, et cur- ,,uatura inferior C depreſſior quam K. Erat tubus cylindri- ,,cus eiusdem formae, ac depingitur, paullum tamen angu- ,,ſtior. Huius extremitas K immiſſa fuit aquae, quae ,,vltro aſcendit ad D, et curuatura ſuperata deſcendit ad ,,C, qua pertranata aſcendit vsque ad B tantum, non ad ,,ſummum orificium A, manebatque diſtantia AB $1\frac{1}{2}$. li- ,,neae vacua. Euacuato et inuerſo tubo, extremum eius ,,A immerſum fuit aquae, quae aſcendit, impleuitque tan- ,,dem tubum DK, excepta parte vltima $1\frac{1}{2}$. lineae. Tu- ,,bum impletum ex aqua exemit, viſurus, an efflueret ex ,,orificio K, an deſcenderet in crure BC?,, ſed manſit aqua in tubo, effluxitque nihil. *Cel.* Auctor omnem lapidem mouet, vt phaenomeni primi huius experimenti rationem expiſcetur, quae, vt verum fatear, mihi difficillima inuentu, imo *impoſſibilis* videtur, *ſi* quidem *omnia ſe habent, vti ſupponuntur.* De veritate phaenomeni plane non dubito. Liceat igitur augurari. Vereor, vt tubus perfecte cylindricus fuerit, et, ne crura CA et FK magis conica

et verſus extremitates ampliora fuerint, quam circa CGD; Tabula XI.
id quod facile accidere potuit, quando ſiphonem, iuxta methodum in praefatione ſua expoſitam, ex parte alicuius Exper. 28.
tubi media exſciſſa fabrefecit; quippe *in ſiphone ſimili*, cu- Figura 40.
ius crus AC verſus L producta ſenſim anguſtabatur, *aqua* non ſolum ad A, ſed et *vltra* M vsque ad L *adſcendit.* *Phaenomenon alterum*, quod nihil effluebat, quando tubus extra aquam tenebatur, nihil difficultatis habet; quippe actio peripheriae B attractiua ſatis fortis erat, vt columnam aqueam ad altitudinem HK ſuſpendere potuerit.

§. 43. Atque haec ſunt experimenta potiora, quae explicare operae pretium duxi; quia phaenomena talia ſuggerunt, quae vel theoriam attractionis euertere, vel difficultatibus ſaltim obnoxia eſſe videntur. Quam theoriam ſiue *Hauksbejanam*, ſiue *Iurinianam* ſed plenius euolutam, dixeris, mihi perinde erit. Talis enim denominatio veritati rei nec proderit nec officiet: modo ſemper meminerimus, voce attractionis nõ cauſſam phyſicam ſpecialem, ſed phaenomenon aliquod generale indigitari, cuius cauſſa detegenda reſtet. Quemadmodum vero omnia facile et naturaliter exinde fluere intelligimus: ita accuratior phaenomenorum enodatio abunde docuit, naturam fluidi ſubtilis cuiuscunque et leges preſſionis, quales vulgo hactenus in hydroſtatica cognitae ſunt, neutiquam in hoc negotio locum habere poſſe; vt ſuperfluum imo inutile ſit, ad iſtiusmodi adminicula confugere. Quo ipſo tamen eos deterreri nolim, qui ad eruendas forte alias preſſionis leges hactenus incognitas, et ad attractionis phaenomena magis accommodatas animum appellere forte adgrediuntur.

DE
ALSINANTHEMO THALII,
SEV
TRIENTALI HERBA IOANNIS BAVHINI,
AVCTORE
J. Amman.

Tabula XIII. ELegantis huius plantulae in Botanicorum operibus ſaepe quidem mentio fit, nullibi tamen character illius bene deſignatur. Sunt qui ad Pyrolae genus retulerunt, ſunt alii, qui peculiare exinde genus conſtituerunt; ſed male omnes, vti ex ſequenti deſcriptione patebit.

Primo ſtatim vere, niue et glacie liquefactis, ex radice craſſiuscula albente, longe lateque ſerpente, multasque fibras fortes emittente, albentes itidem, et alte admodum in terram demiſſas, cauliculus ſurgit ſingularis, teres, tenellus, glaber, non ramoſus, biuncialis aut triuncialis, aliquando et ſpithamalis, prope radicem nudus et flaueſcens; huic ad vnciae vnius aut alterius in altioribus plantis a radice diſtantiam, adnaſcuntur foliola aliquot, tria vtplurimum, nullis pediculis inſidentia, quorum primum, radici ſcilicet proximum, vix duarum linearum longitudinem aſſequitur, ſecundum ſemunciali fere eſt longitudine, tertium autem vncialem iam et longiorem ſubinde obtinet. Ex cauliculi ſummitate folia alia oriuntur, multo maiora iis, quae cauliculi lateribus absque pediculis adnaſcuntur, in vmbellae quodammodo ſpeciem diſpoſita,

diſpoſita, quina, ſena et plura etiam, perbreuibus pediculis ſuſtentata, magnitudine diuerſa, alia enim vncialem, alia ſemuncialem, alia biuncialem habent longitudinem; omnia vero pallide virent et glabra ſunt atqne parum ſplendentia, vtrinque anguſtata, ab anguſta ſcilicet baſi paulatim latiora facta ad medium eorum vsque, vnde iterum paulatim contractiora fiunt, donec deſinunt in apicem. Medium horum percurrit nervus ex pediculo continuatus, albicans, auerſa praecipue parte conſpicuus, multos laterales ramos emittens, ex quibus infiniti alii ſubtiliſſimi quaquaverſum egrediuntur.

Ad exortum foliorum horum vmbellatorum aut ſtellatorum, aliquando quoque ex ala ſupremi eorum, quae cauliculo adnaſcuntur, pedicelli ſurriguntur modo ſingulares, modo bini vel terni, ſescunciales et biunciales, tenuiſſimi, glabri, viridantes albentesue aut ruffi, quorum ſummitates expanduntur in ſex vel ſeptem aut octo foliola anguſtiſſima, duas circiter lineas longa, ſtriata, rubentia, acutiſſima, quae calycem efficiunt; in cuius medio embryo conſpicitur aciculae capitelli magnitudine et forma, piſtillo tenuiſſimo flaueſcenti inſtructus. Fundo autem calycis circa embryonem adhaeret flos monopetalus, rotatus, multifidus, ſpecioſus, albus, in ſex vel ſeptem ſegmenta, acuta fere, ad baſin vsque diuiſus. Creſcente embryone flos a fundo calycis auellitur, ſurſumque eleuatur, deciditque integre cum foramine in medio conſpicuo, in quo embryo ſitus erat. Ad tumentes huius foraminis oras totidem oriuntur ſtamina, quot ſunt floris ſegmenta, capillaria prorſus et ſubtiliſſima, albentia, lineam vnam cum dimidia longa, apicibus onuſta croceis,

qui genitali puluiſculo ſcatent. Delapſis floribus, vti creſcente embryone fieri diximus, embryo tandem fit fructus ſiccus, ſubrotundus, vix ad grani piperis magnitudinem accedens, ex viridi ruffus, et per maturitatem apice dehiscens, in quo ſemina continentur parua, ſeptem vel octo, ab vna parte gibba vel conuexa, ab altera anguloſa, dura admodum, nigricantia, placentae affixa. Vnumquodque praeterea ſemen membranula peculiari tenuiſſima, dilute cinerea, obductum eſt. Teſta fructus per maturitatem in varia fruſta collapſa, ſemina iſta, membranulis his dilute cinereis amicta, diu adhuc ſuper calycem remanent, rubique caeſii fructum non male repraeſentant.

Naſcitur in Ingriae et Careliae Alnetis Betuletisque frequentiſſime ad arborum radices inter muſcos, floretque primo vere, fructum vero fert Iunio Iulioque menſibus.

Maioris et *minoris* mentionem faciunt quidam Auctores, quae tantum varietates ſunt a ſolo humidiori vel ſicciori, ſolis radiis magis vel minus expoſito, pendentes.

Ex data iam deſcriptione concludi poteſt, ad quodnam genus plantarum pertineat, vel an nouum inde conſtitui poſſit. Flos monopetalus, multifidus, rotatus; fructus vnicapſularis, apice dehiscens, pluribus ſeminibus faetus placentae affixis, characteres ſunt, ni fallor, *Lyſimachiae*; hos igitur cum noſtra plantula eosdem omnes habeat, ad idem genus neceſſario referri debet. Poteſt ergo nominari: *Lyſimachia humilis*, *ſtellatis foliis*, *flore albo.*

Huius

Huius porro ſynonyma ſunt,

Herba Trientalis Cord. Obſ. Sylv. Joh. Bauh. Rivin. Flor. Jenenſ.

Herba puſilla trientalis cauliculo ſingulari Hort. Luſat.

Ἀλσινάνθεμος *et* Ἀσεριάνθεμος *Thal.*

Pyrola Alſines flore Europaea C. Bauhin. Pin. 191. *et Prodr. vbi ſatis bona figura. Mor. Hiſt. Ox. Rai. Hiſt. et Meth. emend.*

Pyrolae affinis Alſinanthemos noſtras alpina Pluk. Alm.

Pyrola longo folio, flore albo ſingulari, Polonica Barrel. Ic. 1156. *f.* 2.

Tabula XIII.

Fig. 1. Plantam integram naturali magnitudine demonſtrat.

Fig. 2. Floris auerſam partem cum calyce.

Fig. 3. Fructum maturum, antequam dehiſcit.

Fig. 4. Semina placentae affixa poſt collapſam teſtam.

Fig. 5. Semen.

DE

DE
BETVLA PVMILA,
FOLIO SVBROTVNDO.

AVCTORE
J. Amman.

Tabula XIV. ARboris, cui omnes fere rei herbariae ſcriptores Betulae nomen tribuerunt, duae hactenus ſpecies aut potius varietates, a natura ſoli pendentes, Botanicis innotuerunt; quarum altera arboreſcit, trunco ſatis craſſo et recto, ramisque et virgis minus dependentibus; altera autem fruteſcit magis, nullo ſpectabili trunco aſſurgens, ramis et virgis deorſum pendentibus. Priori ſeu arboreſcenti nihil frequentius in Ingria et Carelia, in quibus regionibus in magnam excreſcit altitudinem; poſterior ſeu fruteſcens Betula rarius occurrit. Verum praeter duas hasce varietates alia ſpecies reperitur plane diuerſa, in paluſtribus locis dictarum regionum proueniens, a nemine adhuc deſcripta, quam *Betulam pumilam folio ſubrotundo nuncupaui*: Eſt autem noua haec ſpecies humilis admodum, vix humanam altitudinem aſſequens, virgis in plurimos et erectos ramulos brachiatis, cortice ſpadiceo, ſplendenti, in tenuiſſimas philyras ductili, veſtitis.

Ramulis hinc inde nullo ordine adnaſcuntur foliola ſubrotunda, breuiſſimis, vix lineam longis, pediculis inſidentia, profunde dentata, viſcoſa, ſuperne laete viridia, inferne pallide vireſcentia, vnciam plus minus lata, tantundem

tundem longa ſiue parum vtplurimum breuiora, ſingularia, non raro tamen bina, terna aut quaterna, ex vno puncto excreſcentia: medium eorum neruus percurrit in plurimos laterales ramos ramuloſque diuiſus, auerſa praecipue parte conſpicuos.

Ex eodem cum foliolis exortu egrediuntur corpuſcula cylindracea, ex viridi flaueſcentia, vnciae trientem circiter longa, lineam cum dimidia lata, ex ſquamulis trifidis, profunde ſectis et axi affixis, compoſita, ſub quibus continentur futurorum ſeminum embryones, qui, ſi ab julorum puluere foecundante impraegnati fuerint, abeunt in ſemina minutiſſima, membranula peculiari, pallide vireſcenti, et ad latera extanti, incluſa.

Tabula XIV.

Fig. 1. Ramum naturali parumper minori magnitudine demonſtrat.
Fig. 2. Folii infernam partem naturali magnitudine exhibet.
Fig. 3. Eiusdem partem ſupernam.
Fig. 4. Fructum integrum.
Fig. 5. Squamulam trifidam.
Fig. 6. Semen membranula ad latera extanti incluſum.
Fig. 7. Semen nudum.

Nota. Rationem, quod deſcriptio et icon Betulae pumilae in Commentarios noſtros relatae ſint, Auctor deſcriptionis in *Icon. et deſcript. ſtirp. rar. in Imperio Rutheno ſponte prouenientium* p. 180. ita explicauit, vt plura addere ſuperuacaneum eſſet. Non impar ratio eſt ſcripti de Trientali; quod ante edita Caroli Linnaei genera in conuentu Academico praelectum Commentariisque inſertum fuit. Dumque iam ſcripta haec Ammaniana prelo committuntur, neutrum Autorum offendi perſuaſiſſimi ſumus: Opera enim vnitis viribus in incrementum ſcientiarum a viris doctrina inclytis collocata vtrique Autori laudem affert; et forte in Ammanianos manes rigidi nimis cenſeremur, ſi vltima fere eius laborum monumenta ſilentio premeremus.

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM, AB ANNO 1726 VSQVE IN FINEM ANNI 1736 FACTARVM, COMPARATIO.

PRAELECTIO PRIMA.

AVCTORE
Georgio Wolfg. Krafft.

§. 1.

Obſeruationes meteorologicae, e quibus ſequentes deductiones elicui, inceptae ſunt a Clariſſimo quondam *F. C. Maiero*, die 27 Febr. ſt. v. 1726. qui Vir, meritis praecipue Aſtronomicis ſpectabilis, cum 24 Nouembr. 1729 pie defunctus eſſet: continuatio harum obſeruationum mihi demandata fuit, quam etiam omni qua potui diligentia et cura hucusque peregi. Cum vero vnice eum in finem obſeruationes inſtituantur, vt ex iis talia deriuentur conſectaria, quae ad incrementum ſcientiae et theoriae faciunt: putaui numerum harum obſeruationum per tot annos inſtitutarum abunde iam iam ſufficere, vt aliquid ſaltem lucis tempeſtatum variabilium, atque aliorum phaenomenorum huc pertinentium, theoria ex iis lucrari poſſit. Ex obſeruationum ſola accumulatione non emendantur ſcientiae Phyſicae, ſed diffunduntur: et, mea qualicunque ſententia, aliquid veri, quam primum id fieri poteſt, ad theoriam, et vtilitatem publicam, ex iis decerpere praeſtat, quam eo vsque expectare, donec veritas manibus quaſi palpari poſſit. Hoc enim ſaepiſſime moram rebus vtiliſſimis affert nimis diuturnam: illud vero, licet non

non ſit ex omni parte perfectum, vſu tamen non caret; atque ſub oculos ponit, qua ratione obſeruationes ſubinde ad finem earum obtinendum accommodatius inſtituendae ſint; cum certo conſtet, nos pleraſque veritates Phyſicas non aliter niſi per continuam quaſi approximationem conſequi poſſe.

§. 2. In Obſeruationibus Meteorologicis praecipue hodie attendi ſolet ad mutationes altitudinum mercurii in tubo *Toricelliano*, vel, ad obſeruationes Barometricas. Quoniam vero nimis longum foret, atque vſu etiam careret, eas omnes huc transſcribere, potius eſſe iudicaui, in tabula ſequenti cuiuslibet menſis maximam et minimam, vna cum vtriusque differentia, apponere; vbi quidem numeri ante punctum poſiti, ſignificant partes duodecimas pedis Londinenſis, hoc eſt, pollices Londinenſes; numeri autem poſt punctum poſiti denotant horum pollicum partes centeſimas, quam quidem menſuram conſtanter retineo. Erat itaque:

		Alt. max.	*Alt. min.*	*Diff.*
1726	Martius —	30. 22 —	28. 22 —	2. 00
	Aprilis —	30. 14 —	28. 80 —	1. 34
	Maius —	29. 97 —	29. 44 —	0. 53
	Iunius —	29. 80 —	29. 14 —	0. 66
	Iulius —	29. 84 —	29. 05 —	0. 79
	Auguſtus —	29. 84 —	28. 64 —	1. 20
	Septemb. —	29. 97 —	28. 72 —	1. 25
	October —	30. 22 —	28. 64 —	1. 58
	Nouemb. —	30. 30 —	28. 51 —	1. 79
	Decemb. —	29. 89 —	28. 47 —	1. 42

		Max.	*Min.*	*Diff.*
1727	Ianuar.	30. 68	29. 09	1. 59
	Februar.	30. 05	28. 30	1. 75
	Mart.	30. 14	28. 55	1. 59
	April.	30. 05	28. 89	1. 16
	Maius	29. 76	29. 14	0. 62
	Iunius	29. 89	29. 05	0. 84
	Iulius	29. 80	28. 97	0. 83
	Auguſt.	29. 84	29. 16	0. 68
	Septemb.	29. 76	28. 80	0. 96
	Octob.	29. 84	28. 22	1. 62
	Nouemb.	29. 89	28. 89	1. 00
	Decemb.	29. 97	28. 89	1. 08
1728	Ianuar.	30. 34	28. 97	1. 37
	Februar.	30. 18	28. 89	1. 29
	Martius	30. 05	28. 76	1. 29
	Aprilis	29. 89	28. 80	1. 09
	Maius	29. 93	28. 89	1. 04
	Iunius	29. 89	29. 14	0. 75
	Iulius	29. 76	29. 05	0. 71
	Auguſt.	29. 76	28. 93	0. 83
	Septemb.	30. 09	29. 01	1. 08
	Octob.	30. 26	29. 18	1. 08
	Nouemb.	30. 09	28. 59	1. 50
	Decemb.	30. 47	29. 14	1. 33

		Max.		Min.		Diff.
1729	Ianuar.	29. 84	—	28. 55	—	1. 29
	Februar.	30. 26	—	29. 14	—	1. 12
	Martius	29. 80	—	28. 68	—	1. 12
	April.	29. 93	—	28. 80	—	1. 13
	Maius	29. 80	—	28. 89	—	0. 91
	Iunius	29. 80	—	29. 05	—	0. 75
	Iulius	29. 64	—	29. 09	—	0. 55
	Auguſt.	29. 89	—	29. 14	—	0. 75
	Sept.	30. 14	—	29. 22	—	0. 92
	Octob.	29. 93	—	28. 18	—	1. 75
	Nou.	30. 30	—	28. 89	—	1. 41
	Dec.	30. 11	—	29. 10	—	1. 01
1730	Ianuar.	30. 16	—	28. 90	—	1. 26
	Februar.	30. 32	—	29. 17	—	1. 15
	Martius	30. 29	—	29. 03	—	1. 26
	April.	29. 84	—	29. 14	—	0. 70
	Maius	29. 89	—	29. 07	—	0. 82
	Iunius	29. 58	—	29. 28	—	0. 30
	Iulius	29. 74	—	28. 89	—	0. 85
	Auguſt.	29. 77	—	28. 86	—	0. 91
	Sept.	30. 07	—	28. 89	—	1. 18
	Octob.	30. 04	—	28. 84	—	1. 20
	Nou.	30. 20	—	28. 44	—	1. 76
	Dec.	30. 37	—	28. 83	—	1. 54

		Max.	Min.	Diff.
1731	Ianuar. —	30. 07 —	28. 37 —	1. 70
	Februar. —	29. 94 —	28. 87 —	1. 07
	Martius —	29. 95 —	28. 44 —	1. 51
	Aprilis —	29. 74 —	28. 90 —	0. 84
	Maius —	29. 74 —	28. 94 —	0. 80
	Iunius —	29. 66 —	28. 93 —	0. 73
	Iulius —	29. 53 —	28. 93 —	0. 60
	Auguſt. —	29. 83 —	29. 11 —	0. 72
	Sept. —	29. 82 —	28. 54 —	1. 28
	Octob. —	30. 24 —	28 72 —	1. 52
	Nou. —	29. 89 —	28. 51 —	1. 38
	Dec. —	30. 24 —	28. 23 —	2. 01
1732	Ianuar. —	30. 14 —	28. 94 —	1. 20
	Februar. —	29. 75 —	28. 52 —	1. 23
	Martius —	29. 56 —	28. 52 —	1. 04
	April. —	30. 14 —	28. 76 —	1. 38
	Maius —	29. 67 —	29. 05 —	0. 62
	Iunius —	29. 66 —	29. 12 —	0. 54
	Iulius —	29. 71 —	29. 10 —	0. 61
	Aug. —	29. 75 —	29. 06 —	0. 69
	Sept. —	29. 76 —	28. 34 —	1. 42
	Octob. —	29. 65 —	29. 14 —	0. 51
	Nou. —	29. 82 —	28. 54 —	1. 28
	Dec. —	” ” —	” ” —	” ”

1733

		Max.	*Min.*	*Diff.*
1733	Ianuar.	,, ,,	,, ,,	,, ,,
	Februar.	,, ,,	,, ,,	,, ,,
	Martius	30. 29	29. 06	1. 23
	April.	29. 97	29. 11	0. 86
	Maius	29. 93	29. 14	0. 79
	Iunius	29. 91	29. 00	0. 91
	Iulius	,, ,,	,, ,,	,, ,,
	Auguſt.	29. 80	29. 20	0. 60
	Sept.	30. 10	28. 92	1. 18
	Octob.	29. 80	28. 62	1. 18
	Nou.	30. 44	28. 82	1. 62
	Decemb.	30. 13	28. 74	1. 39
1734	Ianuar.	30. 13	28. 75	1. 38
	Februar.	29. 98	28. 56	1. 42
	Martius	30. 03	28. 80	1. 23
	April.	30. 21	29. 10	1. 11
	Maius	30. 07	29. 00	1. 07
	Iunius	30. 05	29. 30	0. 75
	Iulius	29. 81	29. 40	0. 41
	Auguſt.	29. 98	29. 03	0. 95
	Sept.	30. 18	29. 09	1. 09
	Octob.	30. 28	29. 03	1. 25
	Nou.	30. 55	29. 18	1. 37
	Dec.	30. 05	29. 10	0. 95

1735

		Max.		Min.		Diff.
1735	Ianuar. —	30. 13	—	28. 80	—	1. 33
	Febr. —	29. 84	—	28. 92	—	0. 92
	Martius —	29. 89	—	29. 10	—	0. 79
	April. —	30. 29	—	29. 20	—	1. 09
	Maius —	30. 06	—	29. 00	—	1. 06
	Iunius —	29. 79	—	29. 18	—	0. 61
	Iulius —	,, ,,	—	,, ,,	—	, ,,
	Auguſt. —	,, ,,	—	,, ,,	—	, ,,
	Sept. —	30. 50	—	29. 20	—	1. 30
	Octob. —	30. 44	—	28. 40	—	2. 04
	Nou. —	30. 20	—	29. 12	—	1. 08
	Dec. —	30. 05	—	28. 48	—	1. 57
1736	Ianuar. —	30. 20	—	29. 43	—	0. 77
	Februar. —	29. 98	—	28. 98	—	1. 00
	Martius —	30. 08	—	29. 15	—	0. 93
	April. —	30. 40	—	28. 95	—	1. 45
	Maius —	29. 96	—	29. 15	—	0. 81
	Iunius —	29. 98	—	29. 13	—	0. 85
	Iulius —	29. 90	—	29. 50	—	0. 40
	Auguſt. —	30. 00	—	29. 49	—	0. 51
	Sept. —	30. 02	—	28. 70	—	1. 32
	Octob. —	30. 13	—	28. 98	—	1. 15
	Nou. —	30. 23	—	28. 65	—	1. 58
	Dec. —	29. 95	—	28. 41	—	1. 54

§. 3.

§. 3. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam in his vndecim annis fuiſſe 30. 68, eamque ſemel occurrere. Fuit autem ea Anno 1727, Ianuarii 22, tempore matutino, cum veſpere diei praecedentis eſſet 30. 64, et circa meridiem diei ipſius 30. 51, in ſerenitate aliquot dierum, ſed frigore ingenti, et flante Euro. Minima vero harum altitudinum eſt 28. 18, quae etiam ſemel tantum occurrit. Accidit ea Anno 1729, Octobris 12, circa meridiem, cum in eiusdem diei tempore matutino fuiſſet 28. 26, et tempore veſpertino 28. 39, tempeſtate procelloſa et pluuioſa aliquot dierum. Eo ipſo etiam die fluuii Neuae noſtri exundatio erat omnium fere maxima, quae ſemper creuit usque ad horam 6. poſt merid. Harum duarum altitudinum differentia eſt 2. 50, vel praeciſe $2\frac{1}{2}$ pollicum Londinenſium, vt adeo hoc ſpatium variationem Barometri Petropolitanam maximam quam proxime determinet, vtpote vndecim annorum tempore definitum. In Transactionibus Anglicanis Num. 294 pag. 45. memoratur, *Derhamum* vnico anno 1698 reperiſſe altitudinem Barometri maximam 30. 40, minimam vero 28. 28. quarum differentia eſt 2. 12. In Hiſtoria Academiae Scientiarum Pariſinae ſcribitur, maximam Barometri ſimplicis altitudinem inuentam eſſe in menſura Pariſina 28 poll. 4 lin. et minimam 26 poll. 4 lin. quarum differentia eſt 2 pollicum; aſſumta igitur proportione pedis Londinenſis ad pedem Pariſinum = 15: 16, erit haec differentia in noſtra menſura 2. 13, quae fere coincidit cum ea, quam inuenit *Derhamus* in Anglia. Praeterea in Transact. Anglic. memoratur, in In-

ſula Iamaica, Latitudinis Borealis 20°, mercurium in Barometro plus quam $\frac{3}{10}$ pollicis Londinenſis nunquam variari, obſeruatum eſſe, quod in noſtra menſura facit 0. 30 poll. Quodſi itaque allegatas Barometri variationes in tabellam colligere velimus, Latitudinibus locorum diſtinctam, exſurget inde hic ſequens laterculus:

Lat. Loci.		*Var. Barom.*
20°.	Inſ. Iamaica — —	0. 30 poll.
49.	Pariſii — — —	2. 13
51.	Londinum — —	2. 12
60.	Petropolis — —	2. 50

Vt adeo haud leuis ſuſpicio exinde naſcatur, variationes Barometri eſſe eo maiores, quo viciniora Polo ſint loca, in quibus obſeruationes inſtituuntur. Ex Obſeruationibus Barometricis, quas Clar. *de la Croyere* Archangelopoli inſtituit in ſpatio circiter vnius anni, inuenio fuiſſe maximam altitudinem 27 poll. 11$\frac{5}{8}$ lin. pedis Pariſ. anno 1729, Aprilis 25, noui ſtyli, in multa ſerenitate. Minimam vero 26. poll. 2$\frac{7}{12}$ lin. dicti pedis, anno 1727 Iunii 12, noui ſtyli, quarum differentia eſt 1 poll. 9$\frac{1}{4}$ lin. vel in noſtra menſura 1. 89 poll. Angl. quod hypotheſi noſtrae quidem non fauet; ſed tempus nimis breue in cauſa eſſe iudico, quod vetuit vt omnium maxima et minima altitudo obſeruari potuerint. Ex maxima porro et minima altitudine Petropolitana Barometri efficitur ibidem eius altitudo media 29. 43 pollicum Londinenſium. Quantum vero aeſtimare licet, Obſeruationes Barometricae, hic loci factae, obſeruatae ſunt omnes in eleuatione circiter 30 pedum Londinens. ſupra maris Balthici ſuperficiem. §. 4.

§. 4. Alterum, quod ex his Obſeruationibus Barometricis deducere licet, conſiſtit in variationibus Barometri menſtruis, hoc eſt, in illis, quae in ſingulis menſibus accidunt. In his itaque ſtatim in oculos incurrit, eas in primis et vltimis anni menſibus fere conſtanter eſſe maiores, in mediis vero anni menſibus conſtanter minores. Eandem hanc Barometri legem obtinere quoque obſeruaui in altitudinibus Barometricis Vltraiecti in Batauia à Clariſſimo *Muſſchenbroekio* pro anno 1728 annotatis, et peculiari tabula expreſſis, quae Diſſertationibus perſpicaciſſimi huius Viri Phyſicis et Geometricis annexa eſt. Idem confirmatur quoque egregie ex Obſeruationibus Clariſſimi *de la Croyere* ſupra citatis. Atque haec quidem lex adeo conſtans eſt, vt in obſeruationibus noſtris vndecim annorum non niſi aliquot exceptiones dentur. Cum autem ex obſeruationibus in Inſula Iamaica inſtitutis appareat, variationem totalem Barometri ibi tam paruam eſſe, vt tantum $\frac{3}{10}$ pollicis exaequet: haud leuis coniectura formari poteſt, calorem aëris in cauſa eſſe, quod per breuius ſpatium mercurius in Barometro euagetur; atque hinc in anguſtiores carceres redigi eius excurſiones in menſibus anni mediis, hoc eſt, aeſtiuis et calidis. Quod vt eo magis confirmem, examinabo illos menſes, in quibus lex allegata non plane locum habuit. Prima itaque exceptio ab hac regula facta eſt anno 1732 menſe Octobri, qui variationem menſtruam Barometri praebuit 0. 51 tantum, cum ad minimum debuiſſet integrum pollicem exaequare. Eo vero tempore vtebar Thermometro mercuriali, quod, in loco a ventis et ſole libero, in maximo calore aeſtiuo mon-

 ſtrabat

ſtrabat gradum 690, et in tempore congelationis gradum 453. ſequentes autem menſes adiunctos oſtenderunt calorum gradus

		Max. cal.	Min. calor.	med.
1732	Auguſtus	665	490	577
	September	576	425	500
	October	556	424	490
	Nouember	502	278	390
	December	448	259	353

ex quo apparet, menſis Octobris calorem medium fere eundem fuiſſe cum calore menſis praecedentis; ſed et in menſe Octobri idem Thermometrum vtplurimum monſtrauit gradum altiorem quam 500; quare iudicandum puto, calorem huius menſis inſolitum in cauſa fuiſſe, quo minus conſuetas ſuas excurſiones Barometrum perageret. Secunda exceptio a regula facta eſt Anno 1734 menſe Decembri, qui variationem menſtruam Barometri praebuit 0. 95 tantum. Obſeruaui autem eo anno in Thermometro mercuriali, quod, in loco a ventis et ſole libero, calore ſummo aeſtiuo monſtrabat 900, facta congelatione autem 688, fuiſſe ſequentes menſium calores.

		Max. cal.	Min. calor.	med.
1734	Iulius	895	824	859
	Aug.	880	756	818
	Sept.	788	660	724
	Octob.	720	506	613
	Nou.	626	450	538
	Dec.	642	450	546

1735

1735 Ianuar. — 625 — 445 — 535

ex quibus iterum patet, menſem Decembrem huius anni calore ſuo maiori, quam eſſe debebat, variationes Barometri coërcuiſſe, quod etiam eo magis ex hoc apparet, quod Thermometri minimus gradus caloris, neglectis tantum diebus vltimis duobus huius menſis, fuerit 501, ex quo fit medius 571, qui indicat, calorem huius menſis ſolito longe fuiſſe maiorem. Tertia exceptio facta eſt anno 1735 menſibus Februario et Martio. Vt igitur hic oſtendam, calorem horum menſium in culpa fuiſſe: comparabo eos cum iisdem menſibus anni praecedentis 1734. Erat autem anno 1734 calor medius Februarii 511, Martii 615; idem calor erat 1735 in Februario 542, in Martio 649; vnde ſatis conſtat, menſes Februarium et Martium anni 1735 iuſto calidiores fuiſſe. Quarta denique exceptio facta eſt anno 1736 menſibus Ianuario et Martio, qui denuo calidiores erant quam par fuit, id quod inſolitae degelationes eo tempore ſatis ſuperque docuerunt.

§. 5. Cum Aurorae Boreales in hac noſtra regione frequentiſſime occurrere ſoleant, atque eae etiam, pauciſſimis forſan exceptis, ſolerter in noſtris Obſeruationibus annotatae ſint: apponam hic earum catalogum generalem, cum praecipuis circumſtantiis, quae in vnaquaque earum fuerunt animaduerſae. Si vero in aliqua nihil praecipui potuit annotari, eius tantummodo diem, quo accidit, indicabo.

1726 Martii 16 ſt. v. in perfecta ſerenitate aliquot dierum obſeruata fuit veſperi Lux Borea, flante Zephyro, quam poſtero die nix leuis ſecuta eſt.

Octob. 8 tempore nubiloſo aliquot dierum viſa eſt Lux Borea, quam poſtero die iterum nix ſecuta fuit. Apparuit haec in Gallia, Anglia, et multis aliis regionibus, plurimisque deſcriptionibus celebrata eſt; ita vt Clariſſimus *de Mairan* hanc prae aliis elegerit, cui Tractatum Phyſicum et Hiſtoricum de Aurora Boreali 1733 editum, ſuperſtrueret, vti videre licet pag. 195 l. c. Dolendum ergo eſt, quod haec Lux Borea tam celebris hic loci ob nubes non potuerit recte obſeruari.

1727 Februarii 7

9

10

11

Martii 2 viſam in Gallia Auroram annotat Clariſſ. *de Mairan*; hic vero nulla viſa fuit; ſed eo die, procelloſo, apparuerunt Parhelii.

13

Septembris 7 obſeruata etiam a Clariſſ. *de la Croyere*, in vrbe Cola.

11

Octob.

1727 Octobris 3
4 quae praeter magnitudinem nihil praecipui oſtendit. Obſeruata etiam Colae, a Dn. *de la Croyere*.
Decembris 9 quam radiis deſtitutam obſeruauimus.
1728 Ianuarii 18 quo tempore turbulenta nix cadebat.
Februarii 1 quae radiis deſtituta fuit, marginem obſcurum, ſed reliquum ſpatium transparens, habuit.
2 in qua duplex arcus viſus fuit, ſed vterque ſine virgis aſcendentibus. Obſeruata haec etiam fuit a Clariſſ. *Muſſchenbroekio* Vltraiecti Batauorum, et annotata in Ephemeridibus Meteorologicis eius pro hoc anno.
20
21
22
26 In qua altitudo arcus fuit 29°, amplitudo crurum 160°.
27
28 quae vix ſenſibilis fuit, quamuis coelum ſerenum eſſet.
Martii 16
22 Cuius radii copioſi vsque in verticem aſcenderunt; quae rurſus a Clariſſimo *Muſſchenbroekio* annotata quoque eſt, vt aliae adhuc quaedam.
23
Aprilis 20

Augu-

1728	Auguſti	14	
	Septembr.	15	
		17	
		26	
		27	
		30	
	Octobris	14	
		16	
		19	
		22	
		27	
	Nouembr.	22	
1729	Aprilis	21	
	Auguſti	18	
		30	Quam ego obſeruaui hora 7 p. m. lucente adhuc ſole, verſus plagam NOO. colore rubro et coeruleo, Iridis inſtar ludentem; quae vero non arcus, ſed trabis longioris et ramoſae, figura apparuit, parumque durauit, ingruente mox pluuia larga.
	Septembr.	10	
		11	
	Nouembr.	5	De qua Clariſſ. *de Mairan* dicit, quod fuerit *remarquable par un grand cercle vertical, qui l' accompagnoit.* pag. 197. l. c.
1730	Ianuarii	5	
	Februarii	4	Memorata quoque a Clariſſimo *de Mairan*, cui apparuit *avec une bande*

bande rouge zodiacale. Fuit haec Aurora omnium, quae hic loci obſeruatae ſunt, maxima, in qua fere totum coelum ardere videbatur. Coepit circa horam nocturnam 9, in ſumma ſerenitate; atque in ea primum virgae candentes ab Oriente, Occidente, et Septentrione, aſcendebant verſus punctum verticale, vltra quod ſaepiſſime porrigebantur. Circa hoc punctum verticale nucleum quendam formabant lucidum, ita vt coelum fornicis luminoſi ſpeciem prae ſe ferret. Verſus Septentrionem arcus erat, cuius crura horizonti fere inſiſtebant, ſummitas autem parum a puncto verticali aberat. Intra hunc arcum plurimae conſpiciebantur virgae intermediae, vaga et inconſtanti luce ludentes, hinc et inde motae, quamuis aër tranquillus eſſet, ſine omni ſenſibili vento. Eis in locis, vbi virgae ab Oriente et Occidente aſcendentes deſinebant, inceperunt formari duo crura noui arcus verſus meridiem poſiti, qui breui completus fuit, et cuius altitudo erat quaſi 7°. Huius pars interior nigra videbatur, inſtar nebulae, per quam tamen *Mars*, eo tempore oriens, prope ſpicam Virginis

 clare

clare aſpiciebatur. Haec obſcuritas cingebatur arcu lucido, primum plane quieto, et ſine virgis lucente; donec tandem circa mediam noctem etiam exinde virgae aſcenderent, et trabes e Septentrione aſcendentes, punctum verticale transeuntes, cum virgis et arcu meridionali coniungerentur. Cum pars meridionalis huius Aurorae maxime flagrare inciperet, minuebantur virgae Septentrionales; et illa aliquando etiam ipſa in plures quaſi nubeculas ſubobſcuras reſoluebatur, mox tamen ad priſtinam arcus figuram redibat. Colores etiam, praecipue in virgis a Septentrione aſcendentibus, obſeruati ſunt rubri. Moſcuae quoque haec lux viſa eſt ab hora 9 nocturna vsque ad 3 matutinam, in omnes plagas aequaliter extenſa, cum virgis rubris, et nucleo in vertice formato; ventus ibi tum erat NW lenis, et ſumma ſerenitas.

1730 Februarii 23 Lux Borea per totum coelum virgis vagis, rubro colore tinctis, ludens, et nubibus permixta; annotata etiam a Clar. *de Mairan.*

26 Lux Borea tenuis, et nubibus tecta.

27

1730

1730 Martii 2

4

5 Lux Borea tenuis, quieta, pallida, cuius arcus tenebat altitudinem 9°, amplitudo crurum 90°.

7 Lux Borea intra nubes viſa.

27 Perfecta ſerenitas, cum arcu lucido Aurorae Borealis quietae, radiis deſtitutae; ſummitas arcus erat 12°.28′, non exacte verſus Boream poſita, ſed deflexa ad Occidentem. Arcus extremitates non accurate notabantur, ſed ſenſim in obſcura deſinebant.

29 Lux Borea humilis, et tenuis.

Aprilis 3 Hoc die terra niue liberabatur, et euidenter fumos quaſi emittere conſpiciebatur; hinc nebula denſa mane orta; veſperi hora 11 Lux Borea oriebatur, maximam partem primo nubibus tecta, mox vero omnino nebulis inuoluta.

4 Lux Borea, humilis et quieta.

8

11 Lux Borea humilis, et tranquilla, lucente Luna, et in N W occidente.

Maii 18 Circa mediam noctem Lux Borea apparuit, vix viſibilis ob crepuſculum. Verſus Orientem nihil eius conſpiciebatur, verſus Occidentem vero pars, ex qua aſcendebant virgae pallidae et breues; altitudo arcus interrupti, quan-

tum quidem ex parte conſpicua colligi potuit, erat circiter 45°; coelum perfecte ſerenum erat, exceptis aliquot nubibus in Occidente, ſtante fortiter Borea. Eodem hoc die Berolini grauiſſima tempeſtas exorta eſt, hora 9. p. m. in qua tribus fulminis ictibus turris templi S. Petri incenſa fuit, et magnum incendium in vrbe exortum.

1730 Auguſti 8

12 Lux Borea humilis, ſed virgis albis, viam lacteam imitantibus, conſpicua, cum arcu diſtincto, cuius vertex a Septentrione paullo verſus Occidentem declinabat.

13

26 Lux Borea tranquilla, e qua paucae virgae aſcendebant. Arcus diſtincti altitudo erat 9° 12′, amplitudo 84°.

28

Septembr. 2 Lux Borea inter nubes.

6 Lux Borea humilis, arcu diſtincto, cuius radii erant intra arcum.

23 Lux Borea humilis et quieta, poſt pluuiam tenuem.

28 Lux Borea humilis et quieta, viſa quoque Francofurti ad Moenum.

30

Octobr. 6 Lux Borea humilis, et breues virgas, ſeu potius globos, emittens.

1730

1730 Octobr. 9 Lux Borea lucente Luna.

11 Lux Borea debilis, lucente Luna, quae Halone cingebatur.

12 Lux Borea Iridis inſtar coloribus diſtincta, radii breues et ſine coloribus; arcus horizonti nulla parte inſiſtit.

22 Nulla Lux Borea hic loci viſa eſt, forſan ob nubes et pluuias aliquot dierum; ſed, vti ex Nouellis publicis huius anni conſtat, Coloniae *Allobrogum* apparuit arcus Aurorae Borealis, cuius altitudo erat 12°, amplitudo 75°. Memorabilis autem eſt haec Aurora, quoniam, teſtante *Mairano*, magna et completa apparuit in America. pag. 197. l. c.

25 Lux Borea, mane hora 4. conſpicua, in qua ex arcu ſatis confuſo virgae aſcenderunt, et quae breui poſt in nigras nubes coacta eſt. Hanc hora 10 veſpertina ſecuta eſt alia Lux Borea, primum per rimas nubium candore ſuo conſpicua, et ſubalbicantibus virgis; quae poſtea, cum coelum nubibus paulum liberaretur, per totam noctem in vertice luſit accenſis et extinctis virgis, quae ad modum fulgurum vibrabant quandoque.

27 Lux Borea inter nubes per rimas conſpicua.

30 1730

1730 Decembr. 3 Lux Borea, quam vidi hora 4 matutina quietam et humilem.

22 Lux Borealis quieta, cum inſigni nebula.

30

1731 Febr. 18 Lux Borea humilis et ſplendens ad modum incendii nocturni.

19 Lux Borea eleuatior quam heſterna, ſed quieta.

24 Lux Borea per nebulas conſpicua.

26 Lux Borea humilis, parua, et tranquilla.

Martii 3 Lux Borea eleuata, candida, lucente Luna.

23 Lux Borea humilis, paucas eiiciens trabes.

Auguſti 18 Lux Borea grandis, quieta, et arcu lucidiſſimo praedita, mane circa horam 3.

Septemb. 15

21

22 Lux Borea hora 8 veſpertina verticalis, inter nubes.

23

26 Lux Borea verticalis et Auſtralis.

27 Lux Borea verticalis.

Octobris 22

Decemb. 9 Lux Borea quieta, in perfecta ſerenitate, quam ſubito nubes continuae ſequuntur, altero die ſerenitas redit.

1731

1731 Decemb. 10 Lux Borea humilis et quieta.
24 Lux Borea circa mediam noctem, quam ſequenti die frigus maximum, cum perfecta ſerenitate, excipit.

1732 Ianuarii 18
19
Febr. 6
8
Martii 10 Lux Borea inter nubes.
Auguſti 16 Veſtigia Lucis Borealis in nubecula albicante tenui, et ſubinde euaneſcente.
Septemb. 7 Lux Borea circa mediam noct em, furente Auſtro.
10 Lux Borea circa mediam noctem. Pariſiis quoque viſa. v. *Comment. Acad. Scient. Pariſ.* 1733.
Octobris 29 Serenitas per integram diem, veſperi vero nubes continuae poſt mediocrem Auroram Borealem, Pariſiis quoque viſam; vid. l. c. quam pruinae, nebulae, et copioſae pluuiae aliquot dierum, ſequuntur.
Nouemb. 3
8 Lux Borea inter nubes continuas, nusquam disruptas, conſpicua inſtar fulgurum ſaepe redeuntium verſus Ortum et Septentrionem.

1733 Martii 11 Lux Borea parua.
14

1733

1733	Septemb.	25	hora 9 p. m. Aurora Borealis cum arcu Iridis a Capite Tauri per Pleiades et mediam Andromedam tranſiens.
	Octobris	31	accreſcente fluuio
	Nouemb.	1	Pariſiis quoque viſa. l. c.
	Decemb.	20	
1734.	Februarii	12	Lux Borea, quam die ſequenti continuae nebulae exceperunt.
		25	Lux Borea humilis in perfecta ſerenitate multorum dierum,
		27	
	Martii	6	
		11	
	Septemb.	13	Aurora Borea debilis.
		19	Circa horam 9 p. m. Lux Borea per nubes viſa.
		21	
		23	Lux Borea in perfecta ſerenitate aliquot dierum.
	Octobr.	3	Lux Borea, quam pruina et congelatio ſequuntur.
		4	
		19	Lux Borea circa horam 11 p. m. ſequenti mane hora 2 matutina vidi Lumen *Caſſinianum* extenſum vsque ad ſignum Cancri, in perfecta ſerenitate
		20	
1735	Ianuarii	24	Lux Borea, quam ſequenti die Parhelii coloribus rubro et coeruleo diſtincti

			ſtincti excipiebant, circa horam 3 p. m.
1735	Febr.	21	Lux Borea, quam fortis congelatio ſequitur.
	Septemb.	12	Lux Borea quieta, in perfecta ſerenitate.
		30	Lux Borea, cum congelatione.
	Nouemb.	3	Lux Borea, quam nix copioſa ſequitur.
	Decemb.	7	Lux Borea, quae perfectam ſerenitatem in nebulam denſiſſimam et nubes continuas mutat.
		9	
		27	
1736	Febr.	5	Lux Borea, poſt Parhelios eo die viſos, in perfecta ſerenitate aliquot dierum.
		6	
	Martii	25	
	Auguſti	2	
		25	
	Sept.	15	
	Nouemb	6	
		20	Lux Borea, in quo loco virgarum lucidarum erant vtrinque circa Septentrionem aequaliter diſtantes trabes obſcurae, inſtar nubium oblongarum.

Intra annos 1727, 1728, et 1729. multae Aurorae Boreales, et plures quam in iisdem annis hic annotatae ſunt, obſeruatae fuerunt diligentiſſime a Clariſſ. *de la Croyere*, qui inſignem curam huic phaenomeno coeleſti impendit. Harum itaque comparatio exacta cum noſtris hic memo-

memoratis multum lucis inferre poterit dubiis adhuc theoriis circa hanc materiam, ſi aliquando inſtituatur. Ex meis Obſeruationibus colligitur, intra hos vndecim annos ad minimum ſpectatas fuiſſe 141 Auroras Boreales; frequentiores eas eſſe ſolere circa tempora vtriusque Aequinoctii; permultaque adeſſe indicia, quae earum materiam non longius quam ab Atmoſphaera noſtra petendam eſſe arguant.

§. 6. Ex hypotheſi Clariſſimi quondam *Maieri* noſtri, quam in Tomis horum Commentariorum I. et IV. explicatam dedit, deducere poſſumus materiae lucidae Aurorarum Borealium a terra diſtantiam ex aliquot exemplis noſtrarum Obſeruationum. Eſt enim per pag. 130 Tomi IV. diſtantia huius materiae ab oculo ſpectatoris $y = \frac{2am\, g^2q^2}{b^2 - g^2q^2}$, in qua formula eſt $a =$ ſemidiametro terrae, $m =$ ſinui altitudinis arcus ſupra horizontem; $g =$ coſinui dimidiae amplitudinis, $q =$ coſinui Latitudinis Loci in quo ſpectator eſt, $b =$ ſinui ($90° +$ Latitud. Loci $-$ alt. arcus) et denique 1 eſt ſinus totus. Vt vero calculus allegatae formulae ope Logarithmorum abſolui queat, diuidantur eius numerator et nominator per b, quo facto abibit ea in $2am \frac{\frac{g^2q^2}{b^2}}{1 - \frac{g^2q^2}{b^2}}$ eſt autem haec adiuncta fractio nihil aliud quam quadratum tangentis anguli cuiusdam, cuius ſinus eſt $\frac{gq}{b}$; quare quaeſito hoc angulo, ope Logarithmorum, vocetur eius Tangens t, eritque $y = 2amt^2$, vel $ly = l2 + la + lm + 2lt - 3$ log. radii; Ex obſeruatione anni 1730, Mar-

Martii 5, erat altitudo arcus $= 9°$, ſemiamplitudo eius $= 45°$, ſub Latitudine noſtra $59° \ 57'$; erit itaque ſubducto hoc calculo, poſita $a = 860$ milliar. Germanicis:

$lg = 9.8494850$		$l2 = 0.3010300$	
$lq = 9.6996258$		$la = 2.9344984$	
19.5491108		$lm = 9.1943324$	
$lb = 9.7993394$		$2lt = 19.6645058$	
9.7497714	$34° \ 12'$		2.0943666

cui reſpondent $124\frac{2}{10}$ milliaria Germanica. Ex obſeruatione anni eiusdem, Auguſti 26, erat altitudo arcus $= 9° \ 12'$, ſemiamplitudo $= 42°$, erit itaque, poſitis reliquis vt ante, diſtantia quaeſita $145\frac{3}{10}$ milliar Germ. Ex obſeruatione anni eiusdem, Octobris 22, quae Coloniae Allobrogum facta fuit, Aurorae etiam in America obſeruatae, et in qua eſt altitudo arcus $= 12°$, ſemiamplitudo $= 37° \ 30'$, ſub latitudine $46° \ 12'$, erit denuo diſtantia quaeſita $281\frac{9}{10}$ milliar. German. quae fere duplo maior eſt, quam ex allegatis ſecunda.

§. 7. Adiungam his alia quaedam leuioris momenti, donec reliqua, quae huc pertinent, omnia abſoluere poſſim, quae ſecunda Diſſertatione ſum comprehenſurus. Primo quidem circa initium gelationis in quouis anno deprehendi, id ſemper cum aſpectu Planetarum quodam inſigni coniunctum fuiſſe. Non haec dico eum in finem, vt vanae illi, et ſuperſtitioſae, Aſtrologiae patrocinari velim, optime enim ſcio, quam multa friuola et ſcientiis indigna ibi contineantur. Sed multiplici experientia edoctus impe-

 trare

trare a me nequeo, vt credam, nihil plane harmoniae, non dico influxus, ſtellarum aſpectibus et poſitionibus intercedere cum tempeſtatibus vagis; atque in ea opinione ſum, vt limites tranſilire eos putem, qui nimis heroico auſu falſa forſan cum veris profligant, et omnia huc pertinentia ſusque deque faciunt; cuius ſententiae meae etiam magnum quondam *Keplerum* fuiſſe inuenio, quam in Tractatu Germanico, cui titulus eſt: *Tertius Interuenieus*, eximie plane expoſuit, et multis non ſpernendis rationibus adſtruxit. Accidit itaque congelatio prima cuiusque anni,

1729. Octobris 22, altero die poſt □ ♄ ☿.
1730. Octobris 4, altero die poſt △ ♄ ☿.
1731. Octobris 11, altero die poſt ☍ ♄ ♃.
1732. Octobris 7, altero die poſt □ ♄ ♂.
1733. Octobris 6, altero die poſt ✶ ♂ ♀.
1734. Septemb. 21, altero die poſt ✶ ☉ ♃.
1735. Octobris 12, in ipſa Quadratura prima ☉ et ☾.
1736. Octobris 22, altero die poſt □ ☉ ♃.

§ 8. Iuuat etiam condere catalogum tonitruum omnium, quae in his annis audita fuerunt. Sunt igitur ea:

1726. Maii 28. Iunii 5. 8. 13. 26. 27. Iulii 10. 12. 19. Septembris 6.
1727. Maii 31. Iunii 5. 15. 28. 30. Iulii 8.
1728. April. 24. 29. 30. Maii 2. Iunii 11. 16. Iulii 21. 23. Auguſti 5. 6.
1729. Maii 9. 12. Iunii 17. 23. Iulii 1. 18. 29.
1730. Maii 15. 20. 26. Iunii 1. 13. 24. Iulii 4. 5. 6. 31. Auguſti 19. 25.

1731.

1731. Maii 9. 23. Iulii 2. 12.
1732. Aprilis 14. Maii 17. 20. Iunii. 7. 8. Iulii 16. 30. 31. Nouembris 22.
1733. Maii 31. Iunii 2.
1734. Maii 11. 13. 16. Iulii 3. 26.
1735. Aprilis 21. 24. 25. Maii 2. 5. 6. 7. 12. 13. 19. 29. 30. 31. Iunii 12. 27. 29. Iulii 2. atque aliis diebus huius menſis ad minimum decies. Auguſti 21.
1736. Aprilis 30. Maii 12. 13. 16. Iulii 1. 2. 4. 6. 7. 16. 23. Auguſti 6. 17. 22.

adeoque intra hos vndecim annos ad minimum tonitrua audita ſunt 107 vicibus.

§. 9. Denique referam quoque quid circa hirundines obſeruauerim; de quibus notum eſt, eas, durante per hyemem frigore, ſub tectis, aut in paludibus, quaſi mortuas deliteſcere, poſtea vero ingruente verno calore reuiuiſcere, et aeſtatem quaſi referre. Quo igitur die ſequentium annorum prima vice hirundines calore excitatas et volantes viderim, coronidis loco hic adiungam:

1730. Maii 5.
1731. Maii 7.
1733. Maii 9.
1734. Maii 4.
1735. Aprilis 30.
1736. Aprilis 28.

Vt adeo hic loci medium tempus reditus harum auicularum ſtatui poſſit in Feſto Inuentionis Crucis, quod incidit in Maii 3 diem; et quod tempus in Germania et adiacentibus regionibus in principium menſis Aprilis incidere, iam diu eſt annotatum.

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM, AB ANNO 1726 VSQVE IN FINEM ANNI 1736 FACTARVM, COMPARATIO.

PRAELECTIO SECVNDA.

AVCTORE

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tabula XV.

Cum in obſeruationibus de calore et frigore annorum praeteritorum inſtitutis adhibita fuerint fere ſemper Thermometra Florentina, quorum vitia abunde nota ſunt hodie: nihil fere in illis eſt, quod ad vſum aliquem applicari poſſit. Ab anno autem 1736 adhibui Thermometrum mercurio repletum, cuius diuiſio incipit deſcendendo ab eo puncto, quod mercurius, aquae feruenti impoſito Inſtrumento, attingit, et quod diuiſione a Clariſſ. *Del'Isle* adhibita adornatum eſt, per quam nempe indicatur, quanam ſui parte mercurius aqua feruente dilatatus quouis tempore ſe contraxerit. Ope huius Thermometri igitur obſeruaui anni, 1736 maximum calorem fuiſſe d. 1. Iulii in meridie, quo tonitrua audiebantur, notante nimirum inſtrumento gradus 1083; maximum vero frigus fuiſſe d. 8. Februarii, ſub gradibus 1700, in perfecta ſerenitate aliquot dierum. Volumen igitur mercurii aqua feruida extenſum contractum fuit 1 Iulii partibus $\frac{1083}{100000}$, ſed 8 Febr. partibus $\frac{1700}{100000}$. Reliquorum annorum praecedentium dies maxime calidi et maxime frigidi, Thermometris Florentinis aeſtimati, fuerunt illi, quos ſequens Tabella indicat.

Annus

Annus		*calor max.*		*frigus max.*
1726	—	11 Iulii	—	9 Mart.
1727	—	2 Iulii	—	2 Febr.
1728	—	18 Iulii	—	7 Ian.
1729	—	12 Maii	—	24 Ian.
1730	—	11 Iun.	—	20 Dec.
1731	—	27 Iun.	—	19 Ian.
1732	—	27 Iul.	—	20 Ian.
1733	—	20 Iun.	—	13 Mart.
1734	—	16 Iul.	—	30 Dec.
1735	—	5 Iul.	—	4 Febr.
1736	—	1 Iul.	—	8 Febr.

§. 2. De Thermometris Florentinis annotatum eſt iam diu, praeſertim a Cel. *Halleio*, *Transact. Anglic. num.* 197 *pag.* 650. Spiritum vini in iis contentum ſucceſſu temporis partem vis expanſiuae ſuae amittere. Didici hoc idem phaenomenon ſpatio duorum annorum. Cum enim per annos 1734, 1735, et 1736 obſeruationes meas inſtituiſſem cum duobus Thermometris, mercuriali altero, ſed arbitraria diuiſione inſtructo, altero Florentino, deprehendi in anno 1736 Spiritum vini deſiiſſe eousque ſe extendere, quo ante biennium ſolebat. Reſponderunt enim ex. gr. Thermometri mercurialis, cuius gradus aſcendendo numerabantur, gradui 838 in Florentino anno 1734 gradus 120, anno 1736 vero non niſi 95. Ex innumeris aliis exemplis haec tantum adhuc adiungam:

Therm.

Therm. merc.		*Therm. Flor.*
838 - -	1734 - - -	120
	1736 - - -	95
853 - -	1734 - - -	150
	1736 - - -	125
856 - -	1734 - - -	150
	1736 - - -	133
865 - -	1734 - - -	156
	1736 - - -	155
866 - -	1734 - - -	166
	1736 - - -	146
895 - -	1734 - - -	210
	1736 - - -	205

Annotari quoque merentur, horologii Anglicani optime conſtituti, ſed in conclaui non calefacto aſſeruati, a ventis autem tuti, motum a ſolo frigore bis interruptum fuiſſe, nempe 1730 diebus 18 et 19 Nouemb. et 1731 10 Ianuarii; et ſaepius etiam in ipſo adhuc medio menſis Maii congelationes accidere fortiſſimas, flante nimirum Borea, id quod ex. gr. factum eſt anno 1731 diebus 12 et 16 Maii.

§ 3. Quamuis indubium ſit, conſpicuos plane eſſe effectus aucti ponderis atmoſphaerici in Thermometra Drebbeliani: non intermittam tamen adiungere ſequentem Tabellam, ex qua differentia graduum dicti Thermometri aſcendendo numeratorum clare perſpiciuntur:

Therm.

Therm. merc.		*Drebbel.*		*alt. Barom.*
1440	— —	1617	— —	29. 63
		1730		29. 93
1450	— —	1674	— —	29. 74
		1730		29. 91
1446	— —	1755	— —	30. 02
		1798		30 10
		1805		30. 13
1390	— —	1497	— —	29. 58
		1636		30. 00
		1556		29. 75
1396	— —	1645	— —	30. 02
		1620	— —	29. 93
1380	— —	1560	— —	29. 90
		1552		29. 70
1342	— —	1445	— —	29. 80
		1420		29. 70

§. 4. Confirmatur denique etiam multis exemplis ex noſtris obſeruationibus regula illa, quae in *Collection. Vratislauienſ. anno* 1717 *menſe Auguſto p.* 123. legitur: quod nempe, calore poſt tonitrua non ceſſante, vtplurimum noua redeant. Nam apud nos anno 1726 10 Iulii tonuit veſperi; praecedente meridie oſtendebat Thermometrum Florentinum gradus 67, poſtero meridie 68, tertio meridie poſt iterum tonuit, et oſtendit poſtea Thermom. gradus 58. Anno 1730 1 Iunii tonitrua audiebantur in meridie, Thermometro oſtendente gradus 13½, poſt meridiem hora 3 oſtendebat gradus 14, et redierunt tonitrua. Anno eodem, 4 Iulii, ante merid. hora 7 erat

erat Thermometrum in gradu $17\frac{1}{2}$, veſperi in gradu 24, cum coelum valde tonaret; poſtero die in meride erat gradus caloris $25\frac{1}{2}$, et redierunt tonitrua. Anno 1732 7 Iunii hora 10 p. m. erat gradus caloris $10\frac{1}{2}$ atque audiebantur tonitrua vehementia; ſequentis diei mane hora 8 oſtendebat Thermometrum gradum caloris 12, et noua tempeſtas exorta eſt hora 11 a. m. Quod idem phaenomenon multis adhuc aliis exemplis confirmari poſſet, niſi haec ſufficerent.

§. 5. Niuium et pluuiarum quantitas accurata his annis obſeruari non potuit, cum hoc negotium difficulter in aedibus priuatis, et ſaepe commutandis, obtineri poſſit. Quantum vero ex aeſtimatione licet iudicare, ceciderunt niues aut pluuiae, tempore omni in vnam ſummam per totum annum collecto,

Anno	1726	- - - - -	40 dies.
	1727	- - - - -	48
	1728	- - - - -	50
	1729	- - - - -	60
	1730	- - - - -	37
	1731	- - - - -	38
	1732	- - - - -	32
	1733	- - - - -	29
	1734	- - - - -	35
	1735	- - - - -	40
	1736	- - - - -	37

ex quo apparet, annum 1729 inter omnes hos reliquos fuiſſe maxime madidum; et pro quolibet anno, termino aliquo medio, aſſumi poſſe 40 dies integros pluuiae aut niuibus deſtinatos.

§. 6.

§. 6. Accidere ſolet haud raro in hac noſtra vrbe, vt fluuius Neua intumeſcat, ripas ſuas egrediatur, atque circumiecta loca humilia totius vrbis inundet, modo altius, modo minus, prout nempe venti inundationes has efficientis vis fuerit maior aut minor. Praecedentium annorum dies ſequenti tabella annotati inſigniti fuerunt hoc phaenomeno, quorum illi, qui aſteriſco notati ſunt, prae reliquis inſignes oſtendunt inundationes:

Anno 1726 Aprilis 14. Sept. 18*. Nou. 1*
1727 Sept. 18. 21*. 22. Oct. 11. 12. 22. 23. Nou. 24. 29.
1728 Aug. 3*. Nou. 3.
1729 Octob. 3*. 12*. Dec. 17.
1730 Ian. 3. 26. 27. Aug. 11. Dec. 19.
1731 Febr. 4. Iun. 5. Iul. 10. 13.
1732 Sept. 15*.
1733 Aug. 25. Sept. 6*. Oct. 5. 8*. 23. 31*. Nou. 3. Dec. 12*.
1734 Ian. 1. 18. Febr. 4. April. 22. Maii 4. Sept. 19.
1735 Febr. 8. 26*. Martii 11. April. 17. Maii 15 Octobr. 24.
1736 Sept. 10*. Dec. 13*. 17. 18. 19*. 24. 28*.

Pauciſſimis caſibus exceptis, omnes hae inundationes acciderunt flante fortiter vento Auſtro-Zephyro, vel *S. W.* verſus quam nempe plagam fluuii pars praecipua in Sinum Finnicum effunditur, atque ſemper eo altius ſubmerſerunt terram, quo fortior ventus modo indicatus eſſet, longiusque duraret.

Xx 2 §. 7.

§. 7. Audiri quandoque ſolent tonitrua etiam in hyeme, ingruentis frigoris, vt communis fert ſententia, indicium datura. Accidit idem apud nos quoque, ſed non niſi ſemel in his annis, vti tum temporis id ex relatione plurium hominum fide dignorum accepi, nempe Anno 1732, Nouembris 22, circa horam 5 matutinam; quo tempore regelatio aliquot dierum fuit, et terra nive omni fere exuta; neque diffiteri poſſum, inſecutum eſſe eo tempore haec tonitrua frigus ſatis intenſum.

§. 8. Rariores etiam ſolent eſſe in hoc noſtro climate grandines, de quibus in *Collection. Vratislauienſ. Anno* 1717 *menſe Iulio p.* 18. idem affirmatur; et p. 20. dicitur, eos ordinarie procellam vehementem comitem habere; de quo poſteriori effato ex ſequenti laterculo iudicium ferri poterit. Accidit nempe vt grandinaret hic loci

Anno 1728. 7 Iunii, intermixta pluuia, et flante Zephyro mediocri.

1729. 19 Sept. ſine omni vento.

1731. 23 Maii parum grandinauit, flante forti Borea-Zephyro, ſiue N. W.

24 Maii grando copioſius cecidit, flante adhuc eodem vento.

1735. 5 Maii et 2 Iulii, ſine omni vento.

Neque etiam ſine exceptione multa verum eſſe deprehendi, Eurum ſerenitatem efficere, et Zephyrum afferre pluuias. Afferri enim hic poſſent, ſi neceſſe eſſet, exempla quam plurima, quae vtramque hanc ſententiam plane infringunt.

§. 9.

§. 9. Quamuis ſubita Barometri mutatio ordinarie ſoleat procellas ſubito ſecuturas indicare: non tamen deſunt plurima exempla, quae demonſtrant, ventos ſaepius quam maxime furere, etiamſi nulla Barometri mutatio praeceſſerit. Ita e. gr. 1730. 18 Aug. erat procella fortiſſima, ex Occidente imbrem vehementem ferens: ſed Barometri altitudo per tres continuos dies conſtans, nempe 29 dig. 1 lin. Procellae vero omnes annorum praecedentium ſequenti tabella continentur:

Anno	1726.	Martii 2. 3. 15. 18. 19. 22. Iun. 30. Sept. 15. 16. 22. 28. 29. Oct. 5. 20. 27. Nou. 5.
	1727.	Ian. 11. 27. Febr. 17. 19. 28. Mart. 2. Sept. 21. Octob. 11. Nou. 18. Dec. 6.
	1728.	Totus annus ſine procella.
	1729.	Aug. 27. 31. Octobr. 2. 3. 12. 13. 26. 27. 29. Nou. 19.
	1730.	Ian. 11. 18. Aug. 18. Sept. 21. Oct. 26. Dec. 27.
	1731.	Febr. 3. 7. 22. Mart. 7. 13. 30. Apr. 10. 15. 21. 29. Iun. 5. 22. Iul. 10. Octob. 20. Nou. 22.
	1732.	Ian. 14. 26. Febr. 6. Apr. 25. Maii 4. 22. Aug. 7. Sept. 15. Oct. 2. 11. Nou. 9. 25.
	1733.	Mart. 11. Apr. 7. 9. Maii 5. Iun. 10. Sept. 4. 6. Octob. 8. 20. 31. Dec. 1. 10. 12. 31.

1734. Ian. 1. 4. 18. 26. Febr. 3. 14. Apr. 15. 17. 22. Maii 4. Iul. 19. Aug. 3. 25. Sept. 19. Octob. 16. Nou. 14. Dec. 19.

1735. Ian. 4. 5. 6. Febr. 8. Mart. 11. 13. Apr. 21. Octob. 19. 25.

1736. Apr. 14. Maii 2. Iul. 10. 24. Aug. 7. Sept. 10. 13. Dec. 13. 18.

ex quibus elicitur, menſem Octobrem eſſe maxime procelloſum; huncque proxime inſequi Septembrem, Martium et Ianuarium.

§. 10. Cum anno praeterito 1736. d. 10. Septembris magna eſſet fluuii noſtri inundatio, Zephyrusque vehementiſſime flaret: obſeruaui, capto ſtatim experimento, vim venti talem fuiſſe, qua aſſerculum, cuius latitudo 208 part. milleſ. ped. Rhenani, longitudo 382, pondus 346 gran. eleuare potuit vsque ad angulum 80 graduum, idque fere conſtanter, non ſubſultim tantum. Ex qua obſeruatione vt celeritas venti illius indagetur, ſit aſſerculus vento expoſitus A C, ſed circa A liberrime mobilis, et in ſitu A C verticaliter dependens. Aſſumamus, cum *Mariotto*, preſſionem aëris moti in aſſerculum verticaliter dependentem eandem eſſe cum ea, quam exerceret pondus voluminis aërei, cuius baſis eſt ſuperficies aſſerculi, et altitudo illa, quae debetur celeritati aëris moti. Itaque ſi altitudo celeritati venti debita ſit $= v$ part. milleſ. ped. Rhen. aſſerculi longitudo A C $= a$, latitudo $= b$, atque vna pars milleſima cubica aëris ponderet m grana: erit preſſio modo dicta in aſſerculum

Tabula XV. Figura 1.

culum verticalem $= abmv$ gran. Iam ponatur aſſerculus per vim venti eleuari vsque in ſitum A H, eritque vis venti in A C ad vim venti in ſitu obliquo A H, in ratione directa primo ſinuum angulorum incidentiae, hoc eſt in ratione ſin. E D A, qui rectus eſt, ſi ſtatuatur ventum horizontaliter progredi, ad ſin. E B A; et ſecundo in ratione etiam directa ſuperficierum, quibus in vtroque ſitu ventus incumbit, nempe A C et A K, ducta nimirum horizontali G H, quia hae ſuperficies, aeque latae, tenent rationem longitudinum. Vocatis ergo ſinu toto $= 1$. anguli C A H ſinu $= s$, coſ. $= c$, erit, vis venti in A C ($abmv$) ad vim venti in A H $= 1$. AC: c. A K; ſed vero A C : AK $=$ A H : A K $= 1 : c$; ergo modo dictae vires inter ſe erunt vti 1 ad c^2, et conſequenter vis in aſſerculum obliquum agens $= abc^2mv$, cuius directio, vtpote omnium ſimplicium aëris impulſuum media, tranſibit per medium aſſerculi B, et perpendiculariter in eundem effectum ſuum exſeret. Sit ergo ducta perpendicularis B F $= abc^2mv$; et quoniam centrum grauitatis aſſerculi ponitur etiam eſſe in medio ipſius puncto B: exponatur pondus aſſerculi per rectam verticalem B M $= p$, quae reſoluatur in laterales B K et B L, illam perpendicularem ad aſſerculum, hanc parallelam; exſeret haec vim ſuam ſolummodo in firmitatem axis A, illa vero in directum contraria erit impulſui aëris B F. Eſt vero in Triangulo B K M, ſinus totus (1) : B M (p) $=$ ſin. K M B (s) : B K (ps). Cum igitur, ex aequilibrio aſſerculi, debeat eſſe B K $=$ B F: habebitur $ps = abc^2mv$, aut $\frac{ps}{abc^2m} = v$. Si vero corpus aliquod ex altitudine v deciderit, acquirit per regulas

Me-

Mechanicae tantam celeritatem, qua aequabiliter motum tempore vnius minuti ſecundi percurrere poteſt ſpatium 250 $\sqrt{v}$. Ventus igitur habens celeritatem debitam altitudini modo inuentae, poterit tempore vnius minuti ſecundi abſoluere ſpatium $\frac{250\sqrt{(ps)}}{c\sqrt{(abm)}}$ part. milleſ. ped. Rhenani, vel etiam $\frac{\sqrt{(ps)}}{4c\sqrt{(abm)}}$ ped. Rhen. In applicatione ad experimentum modo memoratum, erit $p = 346$ gran. $s =$ ſinui $80°$, $c =$ coſ. $80°$, $a = 382$, $b = 208$, et quoniam pes cubicus aëris pondus habet 585 gran. erit $m =$ [illegible] gran. vnde finito calculo inuenictur, ventum tum temporis ita rapidum fuiſſe, vt tempore vnius minuti ſecundi $123\frac{2}{10}$ pedes Rhenanos percurrerit.

§. 11. Superſunt aliae adhuc quaedam Obſeruationes Meteorologicae, quae rarius accidunt, et quas omnes breuiter comprehendam. Parhelii primo viſi ſunt ſequentes:

Anno 1727. Martii 2 poſt ſerenitatem duorum dierum, ſubſequente procella, et niue copioſa.

1730. Ianuarii 4 Parhelii non adeo diſtincte viſi ſunt, ſubſequente altero die Luce Boreali. Nouembris 15 Parhelios vidi non valde
Figura 2. diſtinctos, Iride ex vtraque parte ſolis veri A comprehenſos; arcus Iridis vtrinque eousque extendebantur, quousque tenues aderant nubes; lucente nimirum Sole inter paucas nubes tenues. In *aa* conſpiciebatur color viridis, in *bb* vero ex albo flauus. Durauit hoc phaenomenon ab hora 2 poſtmerid. vsque fere ad Solis occaſum, ſubſequente niue modica.

1731

1731. Ianuarii 12 Parhelii viſi ſunt, ex relatione aliorum.

Ianuarii 15 hora 9 a. m. circa Solem vtrinque arcus apparebant, qui angulum B D C efficiebant 48°, coloribus flauo et rubeſcente inſigniti. In parte inferiori arcuum globi duo lucidiores apparuerunt, durauitque hoc ſpectaculum vsque ad horam 11. a. m. ſerenitatem, quae tunc erat, ſubſequentibus nubibus aliquot dierum.

Septembris 2, hora 8 matutina, viſus eſt circulus interruptus circa Solem, coloribus Iridis ludens, qui angulum efficiebat 20°, ſubſequente perfecta ſerenitate.

1732. Ianuarii 24 fere toto tempore matutino Parhelii videbantur F et G, conſtituentes angulum in oculo ſpectatoris F H G 45°; arcus in A C et B D erant diſtinctiſſimi, et ſolem verſus rubro colore tincti; in E vero obſcure, nec niſi Sole manu obtecto, videbantur; in F et G obſcurae conſpiciebantur Solis imagines. Figura 3.

1735. Ianuarii 25. hora 3 p. m. Parhelii coloribus, rubro et coeruleo, comitantibus apparuerunt.

1736. Februarii 5. tres Soles viſi ſunt, duo nempe Parhelii, ſubſequente Luce Borea eo ipſo, et poſtero, diebus.

Reliqui Solis Halones, nullis Parheliis conſpicui, apparuerunt:

1727. Aprilis 17. 24. 25.* cuius Diameter 30°. Decembris 10.

1728. Iulii 21.

Luna quoque Aula cincta obſeruabatur

1730. Ianuarii 14, quae aula valde tenuis erat, ſubſequente ſerenitate.

Februarii 18.

Martii 19. 25. quo die Sol occidens caudam albam et lucidam per nubes raras trahebat; Luna vero cum Paraſelene et cauda rubra oriebatur, ſubſequente ſerenitate perfecta quatuor dierum.

Octobris 11. hora 9 p. m.

Nouembris 14 hora 5 p. m. Luna oriebatur ſurſum et deorſum cuſpidata longiori cauda.

1733. Nouembris 7. conſpiciebatur coelo ſereno HaloLunaris, ſubſequentibus pluuiis et niuibus.

1734. Septembris 27. aderat Halo Lunaris duplex, ſed imperfectus, hora 10 p. m. in ſerenitate, ſubſequente tempeſtate nubila.

1735. Martii 26. hora 9 p. m. Luna conſpiciebatur in cruce, pallida primum, breui poſt in Aula valde magna, cum aër eſſet plenus vaporibus, ſubſequente ſerenitate.

1736.

1736. Septembris 13. hora 10 p. m. apparebat Aula Lunaris flante fortiter Zephyro, ſubſequente frigore
Decembris 31. idem phaenomenon viſum eſt, inſequente niue.

§ 12. Primus fortaſſe, qui obſeruauit glaciem ipſam, duriſſimam quoque, continua exhalatione aliquid ſui ponderis deperdere, fuit *Mr. Sedileau*, vti videre licet *in Memoires de Mathem. et Phyſique* 1692. Ita tamen parce hanc exhalationem fieri credidit, vt non niſi poſt aliquot dies fiat ſenſibilis. Sed, vt taceam, me deprehendiſſe, in fruſto glaciei bilanci accurate impoſito, ſingulis fere minutis primis decrementum aliquod ponderis ſenſibile; hoc ſolum adhuc referam, quod Anno 1730 Ianuarii 10, hora 4 p. m. e glacie, quam fluuius noſter quotannis induit, inſignes et copioſos vapores egredi, et ad altitudinem aliquot pedum aſcendere, diſtinctiſſime viderim, tempore multum ſereno, neque valde frigido.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNO 1737 INSTITVTAE

A

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Cum in praecedentibus ſatis explicatam dederim deſcriptionem omnium eorum, quae in Meteorologicis obſeruare potui ſpatio vndecim annorum: haud inutile fore ſpero, ſi eodem ordine et ſequentes quoſuis annos pertractem; vt quicquid ex his promanare poteſt vtilitatis, illud quam citiſſime in publicos vſus redundet.

§. 2. Durante igitur anno 1737 obſeruatae fuerunt a me altitudines Barometri ſingulis menſibus maximae et minimae ſequentes:

		Max.	*Min.*	*Diff.*
1737	Ianuar. —	30. 25 —	28. 44 —	1. 81
	Febr. —	30. 35 —	28. 68 —	1. 67
	Martius —	30. 62 —	29. 23 —	1. 39
	April. —	30. 50 —	29. 00 —	1. 50
	Maius —	30. 04 —	29. 42 —	0. 62
	Iunius —	29. 82 —	29. 04 —	0. 78
	Iulius —	29. 70 —	29. 12 —	0. 58
	Auguſt. —	29. 80 —	29. 04 —	0. 76
	Sept. —	30. 20 —	29 40 —	0. 80
	Octob. —	30. 04 —	29. 06 —	0. 98
	Nou. —	30. 14 —	28. 58 —	1. 56
	Dec. —	30. 95 —	29. 07 —	1. 88

Vbi

Vbi quidem rurſus numeri ante punctum poſiti ſignificant partes duodecimas pedis Londinenſis, hoc eſt, pollices Londinenſes; numeri autem poſt punctum poſiti, denotant horum pollicum partes centeſimas, quam quidem menſuram conſtanter retineo.

§ 3. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam hoc anno fuiſſe 30. 95; fuit autem ea obſeruata die 24 Decembris ſtyli vet. hora 10 nocturna; cum eo mane fuiſſet 30. 94, et ſequenti die 30. 89 in perfecta ſerenitate ſex dierum continuorum, flante Euro, frigore ſatis magno, et terra ab aliquot iam diebus ab omni niue liberata. Minima vero harum altitudinum eſt 28. 44, quae obſeruata fuit die 9 Ianuarii hora 9 nocturna, cum nubibus continuis coelum eſſet obductum per aliquot dies, et aër impetuoſus multam niuem ferret. Cum ergo haec altitudo maxima Barometri maior adhuc ſit quam ea, quae in omnibus annis praecedentibus maxima inuenta eſt: mutatur hinc quoque ſpatium variationum Barometricarum. Nam cum maxima altitudo nunc ſit 30. 95, et minima 28. 18, erit ſpatium variationes Barometri omnes tempore 12 annorum includens 2. 77. Caeterum id, quod in praecedentibus obſeruationibus Barometricis iam obſeruaui, etiam hoc anno confirmatur, variationes nempe menſtruas in primis et vltimis anni menſibus eſſe maiores, minores vero in mediis.

§. 4. Aurorae Boreales, quae hoc anno apparuerunt, ſunt ſequentes:

1737 Martii 17 viſa fuit veſperi hora 10 Lux Borealis in perfecta ſerenitate, et aliqua gelatione.

30.

31 Vtraque harum in perfecta ſerenitate, ſplendente Luna; ſequebatur multum niuis.

Aprilis 13 in perfecta ſerenitate, quam nubes paucae exceperunt.

Auguſti 12 Lux Borea inordinata, multis trabibus hinc et inde motis ludens, in ſerenitate multa, poſt pluuiam fortem et tonitrua.

13 Lux Borea debilis, in multa ſerenitate.

14 Lux Borea humilis, et tranquilla, in ſerenitate, quam altero die imber breuis ſecutus eſt.

24 hora 1 matutina erat magna tempeſtas, cum fulguribus et tonitruis fortiſſimis, rediens hora 6 p. mer. fragore paulum imminuto; hora 11 p. m. viſa ſunt veſtigia Lucis Boreae manifeſta, inter multas nubes diuiſas, ſubſequente pluuia larga et fere continua altero die.

Septemb. 7 In ſerenitate dubia apparuerunt veſtigia Lucis Borealis.

Octobris 12 In perfecta ſerenitate, orta poſt nubes continuas aliquot dierum, viſa eſt Lux

Lux Borea veſperi hora 10, quam rurſus nubes continuae cum pluuiis exceperunt.

§. 5. Prima congelatio facta eſt die 6 Octobris, ſatis fortis, ſere vbique per totum diem ſubſiſtens, et quae per aliquot dies ſubſequentes continuo durauit. Contigit ergo haec prima congelatio altero die poſt ☍ ♃ ♀, atque in ipſo die □ ☉, quam die 7 Octobris △ ☉ ♄ inſecutus eſt.

§. 6. Tonitrua hoc anno audita ſunt diebus ſequentibus: Aprilis 30, durante pluuia fere per totum diem. Maii 13 cum pluuia. Iunii 2 cum pluuia forti. 26 ſine pluuia. Iulii 18 ſine pluuia. 25 cum pluuia larga. 30 ſine pluuia. Auguſti 12 cum pluuia forti. 24 hora 1 matutina, redeuntia poſt meridiem hora 6. Quibus adiungo, primas hirundines mihi viſas fuiſſe die 27 Aprilis.

§. 7. Ope Thermometri mercurialis, quod in praecedentibus deſcriptum fuit, obſeruaui, hoc anno maximum calorem fuiſſe Iunii 2, quo die hora 5 poſt mer. Thermometrum oſtendebat gradum 1128, et audiebantur veſperi tonitrua, flante fortiter vento S. W. Maximum vero frigus fuit Februarii 8, oſtendente Thermometro veſperi hora 10 gradus 1675 in perfecta ſerenitate aliquot dierum. Idem Thermometrum die 17 Martii in perfecta ſerenitate Soli libero hora 2 poſt mer. expoſitum, monſtrauit in ſummo calore gradus 1340. Deinde vero die 20 Maii in perfecta ſerenitate octo dierum continuorum libero Soli expoſitum eo vsque aſcendit, vt oſtenderet tandem

dem gradus 910. Neque hic loci praetereo, me die 25 Ianuarii Barometrum expoſuiſſe calori balnei ſudatorii domeſtici, mediocriter calefacti, quod, cum ab initio erat in altitudine 29. 02, poſt elapſum ſemihorium acquiſiuit altitudinem 29. 10, poſtea libero aëri commiſſum rediit ad numerum 29 05, et poſtero die oſtendit 29. 29. Extenſus ergo fuit mediocri calore mercurius Barometro contentus.

§. 8. Pluuias et Niues aeſtimatione tantum perpendentes, inueniemus in hoc anno dies 43 integros pro pluuioſis et niuoſis eſſe habendos; atque menſium habita ratione Iulium pluuiarum fuiſſe feraciſſimum. Fluuii noſtri Neuae tumores ſenſimus Ianuarii 6. Aprilis 1 Iunii 3. flante fortiter N. W. Nouembris 24. Decembris 6. quorum vltimus ſolus inundationem paruam effecit, flante fortiter vento S. W. Nec niſi ſemel toto hoc anno grandinauit, ſcilicet Iunii 11 flante fortiter Zephyro.

§. 9. Procellas experti ſumus diebus ſequentibus: Ianuarii 6. 9. Februarii 10. 12 14 Martii 27. Aprilis 20 Maii 4. Iunii 3. Iulii 2. 3. 8. Auguſti 27. Octobris 10. Nouembris 3 4. Decembris 6.

§. 10. Reliqua, quae referri huc debent, comprehendam ſequentibus. Iridis pars tantum viſa eſt Iulii 3. hora 7. p. m. Duplex vero Iris apparuit poſt parcam pluuiam Auguſti 6, hora $6\frac{1}{2}$ p. m. atque denuo alia ſimplex pulcherrima Auguſti 17 circa horam 6 poſt mer. Deinde Auguſti 26 poſt leuem pluuiam ſpectandam ſe praebuit alia Iris primaria integra, cum veſtigiis ſecundariae.

dariae. Pallorem Lunae Nouembris 25 hora 8 veſpertina valde conſpicuum nix fortis inſecuta eſt. Halone cincta Luna viſa eſt, in perfecta ſerenitate aliquot dierum ſubſequentium Decembris 21 hora 10 veſpertina. Illud vero, quod omnium ſpectatorum excitauit admirationem, ſequens fuit phaenomenon. Decembris 5, circa horam 10 nocturnam, cum nubes continuae totum aërem tenerent, apparuit ſubita rubedo harum nubium vniuerſalis, fortis, aliquando tamen paulum intermittens, ſed ſine minimo indicio materiae alicuius lucentis, aliquot horarum ſpatio durans, aliquotque ſequentibus diebus rediens in iisdem circumſtantiis. Similes coeli rubedines, nubibus etiam obducti, animaduerſae quoque ſunt Decembris 15 et 17, hora 3 min. 50 poſt merid. quae vero non niſi per $\frac{3}{4}$ horae durarunt. Denique in perfecta ſerenitate multorum dierum viſa eſt eadem rubedo coeli fortis et generalis Decembris 22, circa horam 7 matutinam. Vt vero haec phaenomena vltima non adſcribo niſi crepuſculo et aurorae Solis occidentis et orientis, atque aëri tum temporis refertiſſimo vaporibus copioſiſſimis, cum terra niue per maximam menſis totius partem eſſet deſtituta, et fere ſemper roraret: ita primam rubedinem tribuo Aurorae Boreali, quae nubibus tecta fuit. Nam Decembris 15 et 17 Sol occidebat hic $2^h\ 47'$, quibus ſi addatur duratio crepuſculi $2^h\ 57'$, oritur tempus, quo integra lucis ſolaris priuatio coepit $5^h\ 44'$; ſed rubedo primum viſa eſt $3^h\ 50'$, et durauit per $45'$, ergo finem nacta eſt $4^h\ 35'$, cum ſcilicet nondum omnem plane lucem ſolarem horizon noſter amiſiſſet, ſed debiliſſima tamen adhuc illuſtraretur. Idem applicari poteſt ad alteram rube-

bedinem Decembris 22 mane conſpicuam. Oriebatur eo tempore Sol 9^b $8'$, a quo tempore ſi ſubtrahatur duratio crepuſculi 2^b $53'$; oritur momentum, quo primum illuſtrari coepit aër radiis ſolaribus 6^b $15'$. Igitur cum haec rubedo viſa ſit circa horam 7, viſa eſt praeciſe eo tempore, quo Solis radii copioſiores aëri noſtro vaporibus repleto inciderunt. Eo autem tempore, quo prima vice rubedo haec viſa fuit, nempe Decembris 5, hora nocturna 10, occidebat Sol 2^b $47'$, quod tempus durationi crepuſculi 2^b $57'$ iunctum efficit tempus 5^b $44'$, quo aër noſter radiis ſolaribus priuabatur. Luna eo die non niſi 1^b $8'$ poſt mediam noctem oriebatur; igitur neutrum horum ſiderum rubedinis viſae rationem in ſe continere tum potuit. Quapropter nullam aliam cauſam ſupereſſe puto, quam Auroram Borealem, poſt nubes deliteſcentem, et fortaſſe maximam coeli partem occupantem; cum frequenti experientia edocti ſimus, dari quandoque Auroras Boreales, per rimas nubium tantum conſpicuas. Cui ſententiae etiam illud fauet, quod rubedo haec modo intenſior modo remiſſior viſa fuerit; prout nempe virgae vehementiores aut remiſſiores in Luce Boreali aſcenderunt.

CLASSIS

CLASSIS TERTIA.

CONTINENS

HISTORICA.

GEOGRAPHIA RVSSIAE VICINARVMQVE REGIONVM CIRCITER A. C. DCCCCXLVIII.

Ex Conſtantino Porphyrogenneta.

AVCTORE

T. S. B.

ILlis ipſis temporibus, quibus Sphendoſtlabus, ſeu Suiatoslaus, Ingoris filius, rebus praefuit, paullo poſt Kioniam ab Olego captam, Conſtantinus Porphyrogenneta Imperator regiones ad Danubium, Boryſthenem, Pontum, Caucaſum, Volgam et vltra ad Iaicum vſque, in libro de adminiſtrando imperio ita deſcripſit, vt vel maximum operae pretium ad illuſtrandas Ruſſicas origines in huiusce libri explicatione ſitum videatur. Scripſit Imperator librum πρὸς τὸν Θεοςεφῆ ϗ Πορφυρογέννητον Βασιλέα Romanum, filium ſuum, et ita ſcripſit, vt ſermonem ingreſſus ab auſpiciis eius et conſecratione, tamquam recentiſſima in memoria ſuscepti imperii, quemadmodum ſe gerere oporteat, demonſtret. Romanus autem A. C. 948. in ipſa paſchatos ſolemnitate a patre Imperator et collega dictus diadema accepit: Conſtantinus Imp. A. C. 959. xv. Nouembris deceſſit. Ex eo conſequitur, Conſtantinum ante A. C. 948. vtique non ſcripſiſſe librum, cuius tota ratio auſpiciis Romani inſeruit: at cum ad exceſſum vsque duodecim propemodum anni ſuperfuere Conſtantino, dubitari poſſe video in ſatis magno interuallo, quem praecipue annum huicce libro vindicari conueniat. Tab. XVI.

Nihilo tamen minus nos a recenti memoria auſpiciorum Romani et ab A. C. 948. ad ſummam ab A. C. 949. diſcedere patitur Conſtantinus, quando eius verba et totam inſtituti commentandique rationem conſideramus. Huc accedit, quod auctor eſt annis ante ſe quinque et quinquaginta, Turcas Pazinacitis vrgentibus, a Boryſthene pulſos in Pannoniam ſe recepiſſe. Si A. C. 949. Conſtantinus ſcripſit, Turcae impreſſionem illam fecere A.C. 894. ſin ille A. C. 948. ſcripſit, Turcicae inuaſionis memoria inſignitus erit annus 893. Et hoc ipſo anno Eggehardus Vragienſis tum Zuentoboldi Marahenſium regis mortem ponit, tum, *regnum Zuendebaldi*, inquit, *filii eius pauco tempore infeliciter tenuerunt, Vngaris omnia populantibus.* Habeo auctores alios, qui Vngarorum, ita enim Turcas vocarunt, inuaſionem huic anno vindicant, vt alias dicam copioſius. Quare nihil verius eſt, quam A. C. 948. Conſtantinum de imperio adminiſtrando commentantem, res vicinarum gentium prodidiſſe, vt ad eum vsque annum in aula Byzantia cognitae fuerunt. Et Guilielmus Delislius quidem e Regia Pariſinorum Academia, huius clariſſimi viri collegae noſtri frater, Anselmo Bandurio Imperium orientale euulganti eam operam praeſtitit, vt e Conſtantino tabulam geographicam deſcriberet, quae nos ab eodem labore ſuſcipiendo ſubleuare eſt viſa. Attamen dum omnia more meo perquirebam et indagabam, ſenſi eum in nonnullis aberraſſe, vt obſcuro in negotio labi et falli humanum eſt. Praeterea paucas tantum rationes edidit (1), cur aliqua iis maxime in locis poſuerit, quod video, vt accuratius fiat, non modo vtile eſſe, ſed

(1) Apud Bandurium Imperii Orientalis T. II. animaduerſionibus in librum de adminiſtrando imperio praemiſſae ſunt Delislii annotationes in tabulas a ſe concinnatas.

ſed etiam neceſſarium. In his enim ſaepe ſoleo dolere, exſtare tabulas diligentiſſimorum geographorum, non autem ſubiunctas eſſe eorum commentationes, quibus auctoritatibus permoti, et vbi illae deficiunt, quibus argumentis atque diuinationibus ducti vnumquodque nomen ſuis in ſpatiis retulerint in tabulas. Ita explorata ab obſcuris, vera a falſis, discerni non poſſunt. Huic incommodo ſic medebimur, vt in Heredoti Scythica Geographia inſtituimus: nam cauſſas ediſſeremus omnes, quae nobis vniuscuiusque gentis atque loci ſitum, ex Conſtantini Imp. ſententia qualis fuerit, perſuaſerunt. Denique animus nobis eſt, non modo Conſtantinum auctorem et ducem adhibere in tabula, ſed quaedam etiam alia monumenta illorum temporum, quae regiones ad Balthicum mare et ad Viſtulam explicarunt. Sed haec deinceps nobis curae cordique erunt, nunc in Conſtantino Imp. verſabimur.

Incipiam a Caucaſo et Phaſide, non tam ea cauſſa, quod veteres hoc flumine, vt poſt fere omnes, Maeotide atque Tanai, Europam Aſiamque terminarunt (2), quam quod vlteriores regiones ſuscepto labori non inſeruiunt. Phaſis nunc quoque, vt e tabula Ponti Euxini MS. cognoui, veteri vocabulo فاش موي *Phaſch fluuius* vocatur et ad auſtrum habet فاش شالة *Phaſch caſtellum*, antiquam Phaſin. Scylax Caryandenſis iam ante Darii Hyſtaſpis expeditionem: Φάσις ποταμὸς ϗ Φάσις Ελληνὶς πόλις. Auctor de fluminibus incertus, quem Plutarchum imperiti dixerunt: Φάσις ποταμὸς παραρέων τὴν πόλιν, ex Cte-

(2) Agathemeres p. 3. ed. Hudſ. Arrianus in Periplo Ponti Euxini ex Aeſchylo p. 19.

Cteſippi rerum Scythicarum ſecundo. Plinius ipſis *in faucibus* fluminis vrbem ponit. Arrianus, qui Hadriani Imp. XX. anno Cappadociae, cui Tibarena et Colchis accenſebatur, praeerat, cum litora prouinciae ſuae a Trapezunte ad Dioſcuriada circumueheretur, caſtelli huius ſitum et munimenta ita deſcripſit (3), vt ceteros ſcriptores, apud quos vrbis memoria exſtat, hoc loco minime deſideremus. Videtur tamen caſtellum ad Septentrionem fluminis ſtatuere, non, vt in tabula Turcica eſt, ad auſtrum. Fluuius ipſe, vt Agathemeres teſtatur (4) haud magno interuallo a fontibus abſuit. nauigabilem ad ſtadia 180. edidit Scylax. Colchidem a Tyanica, extrema Cappadociae regione, dirimebat Ophis fluuius, qui in periplo litorum a Trapezunte aberat, vt maxime, ſtadia 270. a Phaſide 1170. Itaque ab hoc Ophi Colchis ad Dioſcuriadem vsque cenſebatur Arriani aetate. Multi in Colchide populi ab eodem ponuntur, in his Lazi, Lazis finitimi Apſilae, Apſilis Abasgi, Abasgis Sanigae ad ipſam vrbem Dioſcuriada, quae tum Sebaſtopolis dicebatur. Ab hac vrbe εἰς τὴν παλαιὰν Λαζικὴν, *vsque ad veterem Lazicam* Arrianus in circuitu maritimo numerat ſtadia 1370. ita, vt regio, interiectis Sindis et Achaeis finitima ſit Bosporanis, qui tum a Bosporo Cimmerio vsque ad Sindicam ſtadiis 540. extendebantur. Recordemur Herodoti aetate Lazios ad Maeotin coluiſſe. Inde veroſimile eſt digreſſos ad Pontum iis fere in locis conſediſſe, vbi hac noſtra in tabula Zichia eſt, denique Colchis pulſis, ad Phaſin ſe recepiſſe. In Peutingeriana tabula Lazi iſthic inſcripti ſunt, vbi in hac noſtra eſt Zichia. Videtur auctor *veterem Lazicam* in animo habuiſſe. Nam

(3) p. 9. (4) p. 48.

Nam Plinii aetate, quem primum huiusce rei teſtem citare poſſum, atque deinceps, vt e Byzantiis ſcriptoribus ſatis apparet, multis ſeculis in Colchide ad Phaſin coluere Lazi, ne dicam Theodoſio Imp. cuius aetate Peutingerianam tabulam editam eſſe, Marcus Velſerus cenſuit. Iſthic igitur in Colchide cum colerent, eo Procopius Caeſarienſis (5), Lazos Colchos veteres eſſe, ſcripſit. Sed vt grauiſſimus ſuorum temporum auctor eſt Procopius, ita in vetuſtis parum idoneus teſtis. Colchi, vt Herodotus nos docuit, ipſa in lingua Αἰγύπτιόν τι habuere, certum originis Aegyptiae argumentum, tum alia Aegyptii moris, quae quamquam non ita ad ſtirpem Aegyptiam demonſtrandam valent, tamen illi ſuperiori rationi adiecta conſiſtunt. Verum, vt dixi ſupra, Lazi inter Sauromatas Herodoti aetate deſcripti, ſero Zichiam intrarunt, ſerius Colchidem. Igitur adeo non ſunt Colchi, vt neque Franci ſunt Galli, neque Mauri Hiſpani fuere, aut Luſitani. Ioannes Tzetzes vero (6), οἱ δὲ Κόλχοι Ινθικοὶ Σκύθαι εἰσὶν, οἱ καὶ Λαζοὶ καλούμενοι πλησίον οἰκοῦντες Αὐγῶν τῶν πρὸς Μασσαγετῶν, ὧν Κόλχων τὰ Φάρμακα αὐθημερὸν ἀναιροῦσι. *Colchi ſunt Indici Scythae, etiam Lazi cognominati, qui proxime Augenſes colunt, quemadmodum Augenſes vicini ſunt Maſſagetis: quorum Colchorum venena ad hunc vſque diem colligunt.* Talium teſtimonia hominum, qualis Tzetzes fuit, inuitus produco: producenda tamen ſunt nonnumquam, ne qui, quaſi quod pueri in faba repererint, contra nos proferant, quae contempſimus. Qui, malum Ινδικοὶ Σκύθαι; Nempe venit mihi in mentem Ροδίων Χρησμός. Rho-

(5) De B. G. l. IV. c. 1. (6) Scholiis in Lycophronis Caſſandram v. 174.

Rhodii, cum Lindiae Mineruae quotidie ſacra facientes, eius in fano conuiuia agitarent, Apollinem conſuluere, liceretne ἀμίδαν εἰσφέρειν, riſit ſtoliditatem et licere dixit: at cum iterum quaererent: Χαλκῆν ἢ ὀςρακίνην, iratus reſpondit, μὴ δὲ ἑτέραν. Hunc in modum inter Geographos ſunt (7) qui Ινδοσκυθῶν hibrido nomine ſeſe iactarunt, vt τῶν Γαλλοκελτῶν, quo nomine in diuerſis auctorum ſententiis dubium reliquerunt, Indine eſſent, an Scythae, Galli an Celtae: non hoc Apollo ſiuerit, non Minerua ferat ſua ad puluinaria. Sic Tzetzes cum reperiret Lazos ab aliquibus ſcriptotibus accenſeri Scythis, eosdem tamen Colchos veteres eſſe credidit, Colchos denique Aegypto profectos, eo aſſenſus eſt his, qui tum Indiam ſupra Aegyptum latiſſimis ſpatiis porrigebant, eiusque regionis populo accenſuit Lazos: et eosdem vero etiam Scythas, ne ſuos auctores offenderet, qui Scythas eſſe dixerant. Nam ab illis Scythis, quos Dionyſius Periegetes ad borealem Indi fluminis tractum et illum fabuloſum Alexandri Caucaſum ponit, Tzetzes non videtur reperiuiſſe, cum ille admirator Herodoti non ignoraret Aegyptiae Colchorum ſtirpis veterem famam. Et vehementer meam coniecturam confirmat Menologium Baſilii Porphyrogennetae Imp. aequale Tzetzae temporibus, in quo Lazi Aethiopes vocantur (8): ἐν τῇ Σεβαςοπόλει τῇ μεγάλῃ παρεμβάλλουσιν ὁ Ψάρος καὶ ὁ Φασις ποταμοί. οὗτινος Φασιδος ἐσώτεροι οἱ Αἰθιοπες κατοικοῦσιν. *In Sebaſtopoli magna praeterfluunt Pſarus et Phaſis flumina, cuius Phaſidis interiores ſunt incolae Aethiopes.* Incommode hic etiam de Apsaro et Phaſide; quam

(7) Vide Dionyſium Periegeten v. 1088 et ibi Euſtathium. (8) T. 1. p. 221 Confer etiam Henrici Brenneri notas in Moſem Chorenenſem p. 60.

quam difficultatem Ioſephus Simonius Aſſemannus non ſuſtulit, cum ita interpretatur iſthuc παρεμβάλλȣσι, *quam flumii duo interſcindunt.* Nimirum auctor credidit, eodem alueo ad Seoaſtopolin Apſarum et Phaſidem exonerari. At Aethiopes illi ſunt Lazi, Tzetzae Indoſcythae. Sic multos alios Tzetzae ſimiles ἐπ᾽ αὐτοφώρῳ in vanitate deprehendi. Nicolaus Vitſenius (9) e Petro a Valle obſeruauit, ad Caucaſum, his noſtris temporibus quoque *Lesgos* agere, veteres Lazios. Tantummodo hic caueant Germani, ne Λάζȣς more ſuo pronuncient, ſed leniori ſibilo et quaſi ductili, vt *Lagjos* et paene vt *Lesgos* Sic enim priſci ſuum z enunciarunt: poſteriores acerbiorem ſibilum τζ ſcripſerunt, vt in ipſo Tzetzae nomine. Non poſſum, hoc loco reticere, quae generoſiſſimus Chiliarcha Garberus qui Imperatorio mandato regiones ad Caucaſum orientalem dimenſus eſt, me docuit: regionem *Lesgiſtan*, vt Perſae vocant, intra Caucaſum et ad mare Caſpium multos populos continere, in quibus ſunt Taulinzi, Akuſchinzi, Cubinzi, Kuraelii, Dagiſtani, Dzari, Kumaki, Chaitaki, Tabaſſaran: linguas iſtarum nationum multas et diuerſas inter ſe eſſe, vnam *Lesgicam* in Kubah apud Kuraclios et Kuraeios Dagiſtanorumque quosdam vigere, ab omnibus aliis linguis toto genio discrepantem: Georgianos referre, priſcis temporibus Lesgos ad Pontum Euxinum vsque coluiſſe, pulſos deinde a Cargrelis (ſeu Georgianis in Carguel prouincia, quam noſtri Carduel vocare ſolent) in montes ſeſe recepiſſe.

Aaa 2 Redeo

(9) In Nord en Ooſt Tartarye p. 688.

Redeo ad Conſtantini Imp. tempora. Supra *Lazios* ad boream ponit *Abasgos* et *Apſilos*, tum *Zichios*, porro *Papagios*, denique *Caſachios* et ſupra eos Caucaſum, ſupra Caucaſum *Alanos* in campeſtribus locis (10). Totus Caucaſi tractus, et eius vicini, tam ad auſtrum, quam ad boream occidentemque, campi, non ſic ſunt explorati, vt hic non aut errare poſſimus, aut haerere debeamus Fieri poteſt, vt iſthic campum conſtituamus, vbi excelſa iuga aſſurgunt, ibi nos montem, vbi ingens planities eſt. Sicuti nunc eſt in tabulis, Mengrelia ad Pontum Euxinum ſatis campeſtris videtur eſſe, ad boream et auſtrum Caucaſeis iugis incluſa. Confirmari hoc video ab Arriano. Is enim cum a Trapezunte littora Caſpia obiiſſet, ſaepe excenſionem faciens, ad Dioſcuriada denique et Aſtelephum, haud longe a Dioſcuriade, καθειδομεν, inquit, τὸν Καυκασον τὸ ὄρος, τὸ ὕψος μάλιςα κατὰ τὰς Αλπεις τὰς Κελτικὰς, ϗ τȣ̃ Καυκάσȣ κορυφή τις ἐδείκνυτο (1), *conſpeximus Caucaſum montem altitudine ea, qua Alpes Celticae ſunt, et nobis Caucaſi quidam vertex monſtratus eſt.* Igitur toto illo littore nulli montes, et ad Dioſcuriada, ſeu Sebaſtopolin quoque, longius reiecti. Plinius (2) in Colchide ait, iuga Caucaſi ad Riphaeos montes torqueri, *altero latere in Euxinum et Maeotin, altero in Caſpium et Hyrcanum mare, deuexa*, vt duo quaſi cornua montis eſſe intelligas, quae loca depreſſiora et planiora includant. Cum autem Conſtantinus praeter montem etiam fluuios adhibet ad ſitum populorum definiendum, conſideremus ante omnia, quae dicat flumina, quibus locis deſcribat.

Ab

(10) p. 113. (1) In periplo Ponti Euxini p. 12. (2) l. VI. c. 5.

Ab orientali Maeotidos regione multos fluuios in paludem exonerari ſcribit (3). Primus eſt *Tanais. Cui non dictus Hylas?* In tabula mea Turcica تن صوي quod Mesgninus Meninskius *Ten* pronunciat, alii *Tan*, vt Arabes quidam, qui تان *Tan* ſcribunt, Albugaſi Bahadur Chan *Tin*, adſcripto vocalis ſigno. In eo differt a Danubio, quem طونه *Dona* et طونه و طونه *Duna*, *Dunab* Turcae vocant: adiacentes populi et Ruſſi *Dunai*: quamquam Meninskius obſeruauit, etiam Danubium a quibusdam تن appellari, et Acron ad Horatium, Tanaim quoque fuiſſe dictum. Credo ego totum hoc, *Tan Ton Don Dunai* alicuius in populi, et veteris vero, ſermone nihil aliud, quam *fluuium* aut *aquam* ſignificaſſe, atque ab eadem voce Tanaim, Danubium, Dunam, Duinam, et terminatione ſua Ptolemai Ῥούδων, nomina ſua accepiſſe. Secundum Tanaim ſunt flumina Χωρακουλ, ἐν ᾧ καὶ τὸ Βερζήτικον ἁλιεύεται *Choracul in quo piſcis* (4) *capitur*, et Βαλ *Val*, et Βουρλικ *Burlik* ſeu *Vurlik*, et Χάδηρ *Chadir*, et alii plures. Difficile eſt, vbi nulla veſtigia nominum exſtant, quod cuique fluuio nomen, qui ſitus fuerit, reperire. Tamen inuento, Verucho flumine, de quo dicam poſtea, ſpatium ſaltem inter Tanaim et Chadirum tenemus, in quo cetera flumina deſcribenda ſint, ne Chadirum forte putemus eſſe, qui eſt Vkruch. De Burlico ſic ait: ἐκ δὲ τῆς Μαιώτιδος λίμνης ἐξέρχεται στόμιον τὸ Βουρλικ καὶ πρὸς τὴν τοῦ Πόντου θάλασσαν καταῤῥεῖ, ἐν ᾧ ἐστιν Βόσπορος, *ex Maeotide palude exit oſtium Burlik, et in Pontum Euxinum exoneratur, eo loco, vbi Bosporus eſt.* Subob-

(3) p. 113. (4) De hoc piſce vide Bandurium ab hunc librum Conſtantini Imp. p. 126. 127.

obſcura haec ſunt: tamen apparet eum *Burlik* vocare Maeotidis oſtium, vbi ſe Ponto miſcet, ſeu ipſum Bosporum Cimmerium. Nam iſta ἐν ᾧ ἐςιν ὁ Βόσπορος, ſiue ſic interpretari poſſis ἐν ᾧ δηλονότι τῷ τόπῳ ἐςιν ὁ Βόσπορος ſiue ἐν ᾧ δηλονότι τῷ ςομίῳ τῷ Βέρλικ καλυμένῳ ἐςιν ὁ Βόσπορος, vt Bosporum dicat traiectum, *Burlik* ipſum alueum e Maeotide ſe exonerantem in Pontum. Nomen *Burlico* a Chazaris impoſitum videtur, vt antea a Graecis Bosporo. Eſt autem بِرلك *Birlik* et *Burlik*, Turcice *vnio*, *conſociatio*, quo vocabulo confluentem cum Ponto Maeotidem commode vocarunt. Et Turcica lingua ad explicandas Chazaricas voces lubenter vtor, quia in vicinia harum regionum Chazari, Turcici corporis populus, coluere. At Imperator praeterea inter fluuios, qui in Maeotidem exonerantur, Burlicum recenſet. Videtur igitur eſſe ille fluuius, quem in charta Turcica قوبان *Kuban* vocari video. Poteſt fieri, vt hic fluuius deuectus in Maeotin ſuper eius vndis natet coloremque ſeruet vsque ad Bosporum, vnde ipſius Bospori nomen *Burlik* ei quoque tributum ſit. Ea natura fluuios alios commemorari ſcio, vt erat in Ponto Phaſis (5), et Titareſius ille Homericus, qui Peneo permiſtus καθ' ὕπερθεν ἐπιῤῥέει ἠΰτ' ἐλάιῳ. Infra Burlicum Χάδηρ *Chadir* fuit. Con- veterum morem Graecorum *Chadir* dico, quod ita ſcio Conſtantinum pronunciaſſe. Clariſſimus Delislius hoc nomen illis aquis artribuit, quae mediae inter Aſiae continentem atque inſulam, in qua eſt Tamatarcha, e Maeotide feruntur in Pontum. At hic non tam fluuius eſt, quam Maeotidos alterum oſtium et alter quaſi Bosporus. Tamen

(5) Arrianus in Ponto Euxino p. 8.

Tamen a Delislii opinione non abhorreo, cum حدير قحدور *Chadir et Chadur* Turcice *deſcenſum*, *decliuitatem*, *accliuem alueum* ſignificat, quod his Maeoticis oſtiis pulcre conuenit. Si quis alteri alueo Veruchi, in Maeotidem ſe exoneranti, tribuere nomen *Chadir* malit, multo magis aſſentire lubet, ne nimis longe a Conſtantini fide recedamus. Supra Burlicum Maeotidi miſcetur Βαλ *Val.* Turcae hodie وال *Val* dicunt *cetum*, *piſcem magnum*, forte ſic etiam olim Chazari. Et potuit ille fluuius ſic vehere piſcem, vt ſuperior Χωραυκελ *Verziticon.* Chorakul forte a قره ſeu قرا *kara*, quod non modo *nigrum*, *malum*, ſignificat, ſed et *terram continentem*, et a قول *kol* ſiue *kul*, quorum alterum *brachium*, alterum *ſeruum.* Vel ſic tamen incertum, an *nigrum ſeruum* aut *nigrum brachium*, an a vicino promontorio continentis *brachium* dixerint. Sed haec nos non oportet morari. Itaque haec nomina conueniunt illis fere fluminibus, quibus nos adſcripſimus: quamquam et plura exſtant flumina iis in littoribus, et ceterorum nomina ſe reticere ait Conſtantinus, vt hic facile errare poſſimus, tamen is error non latius pertinebit.

Bosporum Imperator ait XVIII. M. P. latum et obiectum eſſe Bosporo τὸ Ταμάταρχα λεγόμενον κάστρον *caſtellum nomine Tamatarcha.* Sic Anſelmus Banderus e MS. codice emendauit. Tamatarcha credidi a طمان *Taman* et a ترك *Terk* dicta fuiſſe, quaſi *nebulae pharetram.* Inſula haec, in qua Tamatarcha fuit, ea in parte, qua Bosporo oppoſita eſt, magnum ſinum habet, cuius in intimo receſſu tabula Turcica ponit طمان *Taman*

man ſeu *Tuman*, vetuſta Tamatarcha. Nebula autem, cuius pharetram dixere vrbem, omni in palude et in Ponto ſupra modum offundi dicitur. Eodem in loco veteres poſuere Phanagorium. Si ex hac inſula traiicias in Aſiae continentem, tum ipſo Aſiatico in littore tabula Turcica duas turres pictas habet, alteri ad auſtrum adſcripto nomine اطهون *Athun*, alteri ad boream تمرك *Temrak*. Medio autem in Bosporo ante Tamatarchicum ſinum tabula Turcica inſulam ſatis magnam ponit ſine nomine. Haec eſt Conſtantini Imp. *Atech*. Εν δὲ τῷ μέσῳ τῶν αὐλῶν ιη μιλίων νησίον μέγαν χαμηλὸν, τὸ λεγόμενον Ατεχ *in medio* 18 *milliarium* (quae latitudo eſt Bospori ſecundum Conſtantinum, ſi Bosporo ſinum ad Tamatarcha accenſeas) *inſula eſt magna et depreſſa humilitate Atech*. Turcae اتك *Atek* et *Etek*, vt Menninskius explicuit, *ſinum*, *laciniam et gremium veſtis*, *tentorii*, *aliarum rerum* appellant. Qua voce Chazari in huiusce inſulae nomine perquam eleganter vſi videntur.

A Tamatarchis ad fluuium Οὔκρυχ *Vkruch* Conſtantinus M. P. XVIII. aut XX. ponit. Ergo hic fluuius tanto ſpatio, ſeu paullo ampliori a Tamatarchis abſuit, quanto a Taurica Cherrhoneſo Tamatarcha. Apparet, alium, quam hunc, quem in tabula conſignaui, eſſe non poſſe. Ab Vkruch fluuio vsque ad Nicopſin fluuium Conſtantino ſunt M. P. CCC. Eam dimenſionem, vt potui, ſecutus ſum in tabula: nam neque anfractus et receſſus littorum iſtorum ita noti ſunt nobis, neque fluuiorum nomina, vt aliquid certi ſtatuere queamus. Amicorum meorum aliquis me monuit, poſſe fieri, vt fluuii

fluuii nomen ſit Slauonicum: nam Кругъ *Krug* Slauonis eſſe *circulum*, a quo ſinuoſus fluuius nomen duxerit; Chazaros autem, vt Turcarum mos eſt, in multis peregrinis, vocalem adieciſſe initio vocis, vt in *Iskender*. Mihi quoque de Nicopſi in mentem venit, Slauonicum eſſe, et vt Перекопъ ſeu Прекопъ *Perecop* et *Precop* foſſam appellant Slauoni, ita Нїкопъ dixiſſe *fluuium*, veluti *non arte et opera ductam foſſam*. A Nicopſi fluuio μέχρι τοῦ κάστρου Σωτηριοπόλεως M. P. ccc. ſunt, Imperatore teſte (6). Soteriopolis, quae quondam Pityus Magna. Zonaras (7) ſcribit, Conſtantinum M. triremibus profectum Soteriopolin, vt iſthic thermis vteretur. Σωτηρίοπολις, inquit, ἡ νῦν Πύθια. Duae vrbes fuerunt, altera Pityus prope a Trapezunte, ad Septentrionem Dioſcuriadis altera. Illa in Tabula Turcica veterem memoriam inſignitam habet nomine fluminis conſeruato. Eſt ibi اسكي طرابوزون *Antiqua Trapezus*, tum فوتنه موين *Phutineh fluuius*, quod فوتيه *Phutieh* puto ſcribendum fuiſſe, corruptum ex Pityunte. Plinius *flumen et oppidum Pityus*. De altera autem Pityunte Arrianus (8): ὁρμηθεῖσιν ἐκ Διοσκουριάδος, πρῶτος ἂν εἴη ὅρμος ἐν Πιτυοῦντι, στάδιοι τριακόσιοι πεντήκοντα, *nauigantibus a Dioſcuriade primus portus in Pityunte ſtadia CCCL*. Igitur tam e dimenſione Conſtantini, quam ex veteri geographia, Soteriopolin ſuo in loco conſtituere poſſumus. Et cum ab Vkruch ad Nicopſin M. P. trecenta ſunt, teſte Conſtantino, trecenta alia a Nicopſi ad Soteriopolin, ergo

(6) p. 114. (7) T. II. p. 10. (8) l. c. p. 18.

go inter Vkruch et Soteriopolin in medio Nicopſis flauius et vrbs deſcribi a nobis debuerunt. Intra Nicopſin et Soteriopolin illo aeuo Abasgi et Apſilae (9) coluerunt, gentes, vt omnas conſentiunt, eiusdem corporis duae. Abasgos credo populum, qui hodie *Awchaszi* vocantur: multi inter eos Chriſtiani, qui in ſacris Georgiana lingua vtuntur.

Redeo ad Nicopſin, ad quem fluuium Imperator (10) eiusdem nominis vrbem ponit. Ab eo flumine vsque ad Vkruchum Ζιχία fuit (1). Euſtathius Theſſalonicenſis ad Dionyſium Periegeten (2): οἱ Σινδοὶ οἱ ϗ Ζικχοι. Neſcio quam recte. Sindos Herodotus (3) ita collocauit, vt inde ad Themiſcyram, quae ſuper Thermodonte fuit, ſumma Ponti latitudo cenſeretur: hoc eſt ad hunc Vkruchum noſtra in Zichia. Neque tamen Herodotus Euſtathio inſeruit, vt quod vult concludat. Conſtantini regio tota maritima (4). Littori obiectae in Ponto inſulae: vna magna, tres paruae, aliae minores, Imperator ait: Τὸ μέγα νησίον ϗ τὰ τρία νησία ἔνθοδεν δὲ τούτων εἰσὶ ϗ ἕτερα νησία τὰ ἐπινοηθένια ϗ παρα τῶν Ζιχιῶν κλιαθένια, τί τε Τουργάνηρχ ϗ τὸ Τζαρβαγάνι ϗ ἕτερον νησιον, ϗ εἰς τὸν τοῦ ποταμοῦ λιμένα ἕτερον νησίον ϗ εἰς τὰς Πτελέας ἕτερον, *magna inſula et tres inſulae, intra eas vero ſunt et aliae inſulae a Zichis cultae, vna Turganirch, altera Tſarbagani et alia iterum inſula, et in oſtio fluuii* (puta Nicopſeos) *alia, alia denique in Pteleis*, ad quam confugiant Zichi, cum Alani inuadunt prouinciam. Nomina inſularum aliquid Turcici continere viden-

(9) Conſtantinus l. c. p. 114. (10) ib p. 113. (1) ib. p. 113. (2) ad v. 680. (3) l. IV. c. 86. (4) Conſtantinus de A. I. p. 113.

dentur. In primo vocabulo nolim argutari: multa enim in mentem veniunt nobis. In altero ſane videtur چار *Tſchar* et بغانه *Baghana* apparere, quorum iſthuc *thronum* ſignificat, et multis in populis ad Caucaſum regis ſeu principis titulo ab omni aeuo inſeruiit, hoc autem *puerum* ſeu *filiolum* ſignificat. Quas Pteleas dicat, non video. Guilielmus de Rubruquis circiter A. 1250. *Vltimum orificium Tanais eſt Ziquia* (in alio MS. Britannico, *Zibia*) *quae non obedit Tartaris, et Sueui et Hiberi, qui non obediunt Tartaris.* Supra Zichiam erat Παπαγία *Papagia* (5). Papagos alio loco Imperator (6) Zichiorum in corpore recenſet, cum ſic ait: ἐν Ζηχία πρὸς τον τόπον τῆς Πάγης τῆς οὔσης πρὸς τὸ μέρος τῆς Παπαγίας, ἐν ῷ καλοικοῦσι Ζηχοί. Et haec quidem ſubobſcura atque ambigua ſunt: at cum rurſum dicit: ἐν Ζηχία ἐν τῷ τόπῳ τῷ καλουμένῳ Πάπαγι *in Zichia, loco illo, qui Papagi vocatur*, apparet, vt puto, Imperatori illam mentem fuiſſe, vt Zichiam prouinciam diſtribui voluerit inter duos eiusdem corporis populos, Zichios et Papagos, ita autem vt Papagi magis ad boream colerent, Papagi pagus in medio eſſet. In illa regione Zichiae, ἐννέα, inquit, πηγαὶ ἄφθαν ἀναδιδοῦσαι, in altera Papagi item huiusce materiae ſcaturigo eſt. Ridiculum eſt, cum Ioannes Meurſius et Anselmus Bandurinus Latine conuerterunt, *nouem ſunt fontes, qui vlcera in ſummo ore faciunt.* Nimis ſtricte Graecam vocem interpretati, non ſenſere Imperatorem dicere نفط *Naphtam.* Addit enim haec fontium ἔλαια partim rubra eſſe olea, alia flaua, nonnulla ſubnigra. Et Bandurium hoc fugere

 non

(5) de A. I. p. 113. (6) de A. I. p. 156.

non debuit, qui quae Petrus Lambecius de hac voce obſeruuerat, in Antiquitatibus Conſtantinopolitanis ipſe edidit (7). Prope Papagi pagum Conſtantino dicitur eſſe regio Σαπαξὶ Sapaxi, quod puluerem ſignificet. Eſt ſane hoc Turcicum سافيا Saſija, puluis, et a Conſtantino Σαπικιον quoque enunciatur. Πλησιον τȣ̃ Χωϱίȣ τὰ Σαπικιȣ eſt θέμα Δεϱζύνης Derzinis regio: etiam eo in loco fontes naphthae. Τα Σαπικιȣ Bandurius e codice Pariſino, cum antea Meurſius edidiſſet Τασαπίȣ, quod paene credo eſſe verius. Eſt etiam naphthae fons in agro Χαμȣχ Chamuch, qui ager a veteri poſſeſſore nomen geſſit. Ceterum Papagi, ſiue Sapaxi, et Chamuch a mari diſtabant vnius diei itinere, quod quis equo vectus conficiat. In themate Δεϱζήνης Derzinis πλησιον τȣ̃ χωϱίȣ τȣ̃ Σαπικίȣ ϗ τȣ̃ χωϱίȣ τȣ̃ ὀνομαζομένȣ Επισκοπιȣ proxime regionem Sapiciam et dictam Epiſcopium, iterum alios fontes naphthae recenſens, ſimul locorum illorum ſitum nobis demonſtrauit. Addit thema Τζιλιαπεϱτ Tziliapert ſub regione Σϱεχιαβαϱαξ Srechiauarax ob naphthae vbertatem: at cum nulla ſitus nota adiecta ſit, vt nimis incerta in tabula noſtra praetermittenda duximus.

Supra Papagiam ad Septemtrionem, Conſtantino teſte eſt Κασαχία ſeu Καζαχία (8) Caſachia. Cl. Delislius Caſachiam medio Caucaſo in quandam planitiem abſtruſit. Cum autem Imperator diſerte ſcribit, ἄνωθεν τῆς Κασαχιας ſupra Caſachiam eſſe montes Caucaſeos, et vltra hos montes eſſe τὴν Χῶϱαν τῆς Αλανίας, ea cauſſa indu-

(7) Imperii Orientalis T. II. p. 817. (8) p. 113. 111.

inducor, vt Caſachiam in interiori et citeriori ad Pontum planitie ponam. Haec eſt omnium vetuſtiſſima Caſachicae gentis et ſedis memoria. De Alanica non opus eſt, vt multa dicam, quoniam regionis eius ſitus clariſſime demonſtratus eſt, cum Alani Conſtantino dicuntur coluiſſe in planitie vltra Caucaſum ſeu ad boream montis, hoc eſt, inter oſtia Volgae et Tanais. Igitur ab occaſu vicinos habuere Chazaros, quorum fines, qui fuerint verſus Alaniam et Zichiam, paullo infra declarabo. Supra Alaniam Conſtantino teſte eſt *Ουζ*, *Vs* populus. Deliſlius *Vzos* medios inter Tanaim et Volgam poſuit, propiores vero Tanai. Non hoc dixerat Imperator, cuius verba expendenda nobis ſunt hoc loco (9): Ιςέον, ὅτι οἱ Πατζινακῖται τὸ ἀπ' ἀρχῆς εἰς τὸν ποταμὸν Ατηλ τὴν αὐτῶν εἶχον κατοίκησιν, ὁμοίως δὲ καὶ εἰς τὸν ποταμὸν Γεηχ, εἴχοντες τοὺς τε Μαζαρους συνοροῦντας καὶ τοὺς ἐπονομαζομένους Ουζ. Πρὸ ἐτῶν δὲ ν' οἱ λεγόμενοι Ουζ μετὰ των Χαζάρων ὁμονοήσαντες, καὶ πόλεμον συμβαλόντες πρὸς τοὺς Πατζινακίτας, ὑπερίσχυσαν καὶ ἀπὸ τῆς ἰδιας χώρας αὐτοὺς ἐξεδιωξαν καὶ κατέσχον αὐτὴν μέχρι τῆς σήμερον οἱ λεγόμενοι Ουζοί. οἱ δὲ Πατζινακῖται φυγόντες, περιήρχοντο ἀναψηλαφῶντες τόπον εἰς τὴν αὐτῶν κατασκήνωσιν. Καταλαβόντες δὲ τὴν σήμερον παρ' αὐτῶν κρατουμένην γῆν, καὶ εὑρόντες τοὺς Τούρκους οἰκοῦντας ἐν αὐτῇ, πολέμου τρόπῳ τούτους νικήσαντες καὶ ἐκβαλόντες ἐξεδιωξαν αὐτοὺς καὶ κατεσκήνωσαν ἐν αὐτῇ καὶ δεσπόζουσι τῆς τοιαύτης χώρας, ὥς ἔρηται, μέχρι τῆς σήμερον ἔτι νε: *Pazinacitae*, inquit, *initio coluerant ad fluuium Atil et ſimiliter ad fluuium Geich: habuere vicinos*

(9) p. 105.

Mazaros et populum, quem vulgo vocant Vs: ante annos autem quinquaginta, Vſi, cum Chazaris foedere inito ad gerendum bellum, ſuperiores euaſere Pazinacitis eosque regionibus ſuis pepulerunt: has autem regiones Vſi ad hunc vsque diem tenent. Vetus igitur regio Patzinacitarum fuit ad *Atil.* Recte Delislius *Volgam* eum fuiſſe vidit. Is eſt Theophanis Byzantii Ατάλις et Ατελ, Turcarum et Tatarorum اتل *Atil.* Sed Γεηχ qui eſſet, quamquam Delislius in annotationibus ſenſit, tamen in tabula neglexit. Lego *Gëch*, non vt ille, *Geech.* Nam et Imperatoris huius temporibus, et multo tempore ante eum, τὸ H pronunciatum eſt medio ſono inter E et I, propiori tamen ad poſtremam vocalem, et paene ita, vt nihil differret: hoc ſecutus ſum in omnibus vocibus barbaris, in quibus etiam accentus praetermittere ſoleo, quod ignotae pronunciationi magis officiunt, quam adiumento ſunt nobis. Nunc non eſt obſcurum ab Imperatore dici يايق *Jaik* fluuium, qui in Caſpium mare ſe exonerat. Et cum Menander Protector in legationibus (10) τὰ ῥεῖθρα τοῦ Ιχ et τὸν Δαιχ iisdem in regionibus commemorat, alterutrum eorum Jaicum eſſe opinor: immo pro Γαιχ e Valeſiano codice eſt editum. Abulgaſi Bahadur Chan in Genealogia Turcica hos tres fluuios تين, اتال, يايق *Tin* (Tanaim) *Atel* et *Jaik* frequenter coniunxit. Quae cum ita ſint, Patzinacitae a Volga ad Jaicum regiones tenuere: easdem occuparunt Vzi et Mazari pulſis Patzinacitis, annis antequam haec ſcripſit Conſtantinus, quinquaginta ſeu potius, vt infra accuratius edidit, quinque et quinquaginta, hoc eſt, circiter A.C. 893. cum

(10) p. 109. ed. Pariſinae.

eum Leo Philoſophus, Conſtantini pater, imperaret. Vbi Imperator ait, Pazinacitas illis priſcis in ſedibus vicinos habuiſſe cum Mazaros tum Vzos, ſunt, qui pro Mazaris τοὺς τε Χαζάρους legi malint, nulla neceſſitate, et MSS. libris et editis refragantibus. Cauſſam interſerunt, quod Vzi deinde dicantur μετὰ τῶν Χαζάρων ſocietate inita Pazinacitas pepuliſſe. Immo potiori iure alterum emendauerim μετὰ τῶν Μαζάρων Sic enim Imperator rem omnem narrat: *Pazinacitae ab Vzis pulſi fugientes et circumcurſitantes quaerebant, vbinam ſedes ſuas collocarent: profecti vero in terram, quam nunc tenent, Turcas, quos iſtbic reperiebant colere, bello victos expulerunt, eaque in regione tentoria fixerunt: rerum autem ibi potiuntur, vt ſupra dictum, ad hunc diem, annos quinque et quinquaginta.* Ex his conſequitur, non Chazaros ſocietate cum Vzis inita Patzinacas ſedibus eieciſſe, ſed Mazaros. Nam vt tum erat, qui potuere Chazari et Vzi arma coniungere, tanto interuallo ſeiuncti? Si Chazari eo bello ſuperiores fuere, qui potuere Turcae pelli, neceſſarii Chazarorum, inuitis Chazaris? Nihil igitur eſt reliquum, quam vt ſic emendemus Conſtantinum, quemadmodum ſupra poſuimus. Igitur Mazari quoque ſupra Vzos inter Tanaim Volgam et Iaicum conſederunt. Et Abulgaſi Bahadur Chan cum de قبجاق *Kibgjak* agit, ita fatur: *Huic, poſtquam adoleuit,* اوغوز *Ogus copias tradidit, vt* وروش والاق وماجار وباشقر *et Ruſch et Olak et Magjar et Baſkir, qui iuxta fluuios* تين واتيل ويايق *Tin et Atil et Jaik colebant, debellaret: hic poſtquam eos vicit, per trecentos annos iſtis in locis regnauit, omnes* قبجاق ديرلار *Kibgjak dirlar dicti ſunt: inter Oguſum et Gengis chan*

chan regem nulli alii quam Kipgjaki ſubditi annos quater mille inter tres fluuios coluere et locus vocatur دشت قبجاق *Deſti Kibgjak*, *ſeu campus Kibgjak.* Quater mille anni, inſiceta fabula eſt: at iſtae regionum intra Tanaim Volgam et Jaicum gentes nulli magis tempori conueniunt, quam huic. Videntur igitur iam tum Ruſſi ſuperiores regiones occupaſſe, ſub iis ad Caspium mare Vzi, medii ad Morduanos vsque Mazari egerunt. Mazari ſine dubio horum, qui nunc Hungari dicuntur, maiores exſtiterunt. Ita ſeſe ipſi appellant. Albertus Molnar in Lexico Hungarico: *Hungaria*, *Magyar orszag.* *Hungarus*, *Magyar.* Turcis Hungarus مجار *Magjar* et مجارلو *Magjarlu*, Hungaria *Magjar* et مجار قرالي *Magjar krali*, Hungariae rex. Eodem nomine Hungari Polonis. Cum Hungari ipſi ab illa ſtirpe ſuam gentem repetunt, nihil dubitationis ſupereſt. Hungari enim noſtri adeo non ſunt Hungari, vt neque Turcae Conſtantini in Pannonia, quamquam eos quoque illarum aetatum ſcriptores Germani vocauere Hungaros. Cum autem prope Morduanos coluere Magjari, mirum non eſt, quod tam multa Fennica in hoc Hungarico ſermone admiſta ſunt, vt Olaus Rudbequius, Olai filius, demonſtrauit, Matthias Belius autem minime diffitetur: Fennici enim corporis fuere Morduani. Vzi Pazinacitas quosdam, qui ſe dediderant, inter ſe colere paſſi ſunt. Eos, Imperator ſcribit, a ceteris Pazinacitis habitu ſe discreuiſſe: veſtibus enim ad genua curtatis et manicis abſciſſis, ſignificaſſe, ſe a reliquo populi ſui corpore fuiſſe auulſos. Cum autem Imperator Vzos εἰς τὸν ποταμὸν Ατηλ

(1) p. 62.

Ατηλ agere ſcribit; id quidem nihil aliud eſt, quam πρὸς τὸν ποταμὸν Ατηλ, *ad fluuium Atil.* Idcirco nos regionem Vziam ad occidentalem ripam Volgae aliquanto ſpatio protendimus. Cauſſam quoque aliam, ſane iuſtam, vt ita faceremus, habuimus. Nam Imperator tradit Εννέα κλίματα *Nouem climata* ſeu regiones Chazarorum vicinas fuiſſe Alaniae, ita tamen, vt etiam ab Vzis infeſtari poſſent. Itaque non ita longe a Nouem climatibus reiecti fuere Vzi, vt totus Volga eos ſepararit. Οἱ Οὖζοι, inquit, δύνανται πολεμεῖν τοὺς Χαζάρους, ὡς αὐτοῖς πλησιάζοντες, *Vzi poſſunt bello impetere Chazaros, quippe cum eorum vicini ſint.* Idem paullo ante dixerat (2), etiam Pazinacitas ab Vzis bello infeſtari poſſe. Quae cum ita ſint, haud longe a Tanai, quo Pazinacitae continebantur, abfuerunt Vzi. Quemadmodum a Garbero Chiliarcha accepimus, in Taulinis montibus ſeu تاولیستان *Tauliſtan*, multi populi paruis prouinciis deſcribuntur, linguis admodum viginti diuiſi, in quibus nominantur Taulinzi, Oſſi, Suani, Dziki ſeu Gjiki, Tuſchi. Haud equidem dubitarim Oſſos eſſe Vzos. Exſtat etiam memoria priſcae ſedis Mazarorum, inter Tanaim et Volgam. Nempe fluuius Kuma, e Caucaſeis montibus ſeptemtrionem et orientem verſus in planitiem deuectus, auctusque multis amnibus, orientem atque auſtrum petit, donec Caſpio mari miſcetur: duorum itinere dierum a Caucaſo, Biuara fluuius, ex planitie inter Tanaim et Volgam profectus, in Kumam incidit. Ad confluentes fluuios vrbis magnae cadauer iacet, palatiorum rudera, et ſubterranearum cellarum ſubſtructiones

(2) p. 61.

ſtiones. Czyrkaeſſi et ceteri vicini populi vrbem eam nationis *Magjar* fuiſſe conſentiunt.

Venio ad Chazaros in Europam. E Theophane Byzantio in rebus Iuſtiniani Rhinotmeti clariſſime tenemus τὴν Χαζαρίαν in parte ſeptemtrionali Cherrhoneſi Tauricae fuiſſe. Sed quoniam in harum gentium finibus ſaepe mutatum eſt, in Conſtantini Imp. aetate vt fuerit, accutius expendemus. Nam Tamatarcha vbi ſita fuerint, demonſtraui. His in Aſiae continenti ad Maeotida fuere coniuncta Εννέα κλήματα *Nouem climata*, ſeu regiones Chazarorum, et vicinos habuere ad Vcruchum Zichios, tum Alanos ad orientem, et Vzos ad borapelioten. E Tamatarchis et Nouem climatibus Chazari neceſſaria repetebant (3). Cetera vt accuratius teneamus, primum opus eſt littora et fluuios aliaque, in quibus mutari natura non eſt paſſa, conſideremus. Sic non modo in Chazaria, ſed etiam in ceteris reginoibus inoffenſo pede verſabimur. Conſtantinus dum iter Patronae a Danubio in Chazariam et Tanaim explicat, ſimul fluuios interiectos ordine ſuo recenſet. Duo inquit ille, maximi, Δάναστρις καὶ Δάναπρις. Danaſtris, nunc Polonis *Dniſter* et *Nieſter*, Herodoti Tyras: Δάναπρις, nunc *Dniper* et *Niper*, eſt Boryſthenes vetus, vt ex ipſo ſitu cognoſcimus. De Danapri nullum eſt dubium. Periplus Ponti Euxini incerto auctore (4): Βορυσθένην ποταμὸν τὶν νῦν Δάναπριν λεγόμενον, *Boryſthenem fluuium nunc Danaprim dictum.* Idem in hunc modum etiam aliis in locis. In tabula Turcica Boryſtenes اوفي موين *Oſi* ſeu

(3) Conſtantinus p. 62. (4) p. 8. 9. 16. ed. Hudſon.

ſeu *Iſi fluuius*, et in promontorio, quod ex aduerſo oſtiorum Boryſthenis et Bogi eſt اوذي قلعة *Odſi caſtellum*, illa inquam vrbs, quam nomine Oczakow magis nouimus. Tyram auctor peripli alio, quam hoc Tyrae nomine, non inſigniuit. Tyram etiam Geographus Rauennas Conſtantino Imp. fere aequalis nominat (5). *Flumina Ava, Boryſthenis, Danapris, quae cadunt in mare Ponticum: item fluuius Tyram, item Bagos ſolam: de quibus nominibus teſtatur Iordanis ſapientiſſimus cosmographus.* De *Ava* Placidus Porcheron nihil inuenit, quod diceret. Videtur autem Rauennas *Sauiam* in animo habuiſſe, et vrbis atque fluminis nomina confudiſſe. Periplus Ponti Euxini Ὀλϐίαν Σαϐίαν vocat Olbiam ſeu Boryſthenem vrbem veterem, Graecorum coloniam ad Danaprin. E contrario Rauennas ille Boryſthenem fluuium a Danapri perperam diſtinguere videtur. At Iornandes (6), *flumina Tyram, Danaſtrin, et Vagoſolam, magnumque illum Danaprum*, inde ab Iſtro recenſet. Et paullo poſt: *Antes ad Pontum mare curuantur, a Danaſtro extenduntur vsque ad Danaprum, quae flumina multis manſionibus ab inuicem abſunt. Tyram Danaſtrin* forte per appoſitionem dixit, vt plane ſit, qui nunc *Niſter*, in quo Dionyſius Petauius ad Nicephorum Conſtantinopolitanum (7) nequidquam dubitauit. Nicephorus ſcribit (8), Aſparuchum, Danapri et Danaſtri fluminibus traiectis, ad Danubium conſediſſe. Sic Ammianus Marcellinus (9) *amnem Danaſtrum inter Hiſtrum et Boryſthenem* ponit. Cedrenus ordine recenſet (10), Da-

Ccc 2 nubium,

(5) p. 143. ed. Porcheronis. (6) p. 194. ed. Muiat. (7) In animaduerſionibus p. 77. (8) In Hiſtoria Conſtantinopolitana p. 23. (9) l. XXXI. 3. p. 479. ed. Gronov. (10) p. 464.

nubium, Danaſtrin, Danaprin, Necropyla. Ex hoc ſitu atque ex fluminum interuallo ſatis apparet Danaſtrum eſſe, qui nunc Dniſter ſeu Niſter, eodem vocabulo, at Turcis تولە موي *Tuleb* fluuius dicitur. Mirari ſubit, quid in mentem venerit Iſaaco Voſſio (1), vt Petauium ne dubitare quidem pateretur, ſitne is Danaſtrus, qui veteribus Tyras. *Is*, inquit, *eſt Hypanis, qui eodem cum Boryſthene oſtio in Pontum profluit*: et addit, illum etiam nunc Niperum vocari. Vt vanum eſt hoc poſtremum, ita cetera ſunt omnia quae ſcripſit: nam fluuium, qui Danapri oſtiis miſcetur, *Bog* vocant Poloni. Is eſt Iornandis *Vago ſola*, Ruennatis *Bagos ſola*, Conſtantini Imp. Βογου veterum Hypanis. Conſtantinus Imp. ceteros fluuios nominans ſic ait: Συγγουλ, Υβουλ, Αλμαται, Κουφις, Βογου. *Kuphis* Delislio viſus eſt, eſſe is ipſe, quem ex Herodoto Hypacyrin et Gerrhum nominauimus. Theophanes Byzantius (2) iſti ſententiae inſeruire videtur, cum ita ſcripſit: Bulgaros olim ſupra Pontum Euxinum in ſeptemtrionalibus regionibus coluiſſe, et ad Maeotidem, εἰς ἣν εἰσάγεται ποταμὸς μέγιστος ἀπὸ τοῦ ὠκεανοῦ καταφερόμενος διὰ τῆς τῶν Σαρματῶν γῆς, λεγόμενος Ατελ, εἰς ὃν ἄγεται ὁ λεγόμενος Ταναῒς ποταμὸς καὶ αὐτὸς ἀπὸ τῶν Ιβηρίων πυλῶν ἐξερχόμενος, τῶν ἐν τοῖς Καυκασίοις ὄρεσιν. ἀπὸ δὲ τῆς μίξεως τοῦ Ταναι καὶ τοῦ Ατελ ἄνωθεν τῆς προλεχθείσης Μαιώτιδος λίμνης σχιζομένου τοῦ Ατελ ἔρχεται ὁ λεγόμενος Κοῦφις ποταμὸς καὶ ἀποδίδει εἰς τὸ τέλος τῆς Ποντικῆς θαλάσσης, πλησίον τῶν Νεκρῶν πυλῶν εἰς τὸ ἄκρωμα τὸ λεγόμενον Κριοῦ πρόσωπον, *in quam*

(1) In notis ad Periplum Ponti Euxini p. 83. ed. Hudſon. v. in Melam.
(2) p. 296. 297.

quam ſe exonerat fluuius maximus, ab oceano deuectus per Sarmaticas terras, Atel: in quam etiam ſe exonerat Tanais fluuius, qui et ipſe ab Iberiis portis, quae in Caucaſo monte ſunt, deſcendit: poſtquam Atel ſe miſcuit Tanai, iterum Atel ſupra modo dictam Maeotin curſu ſuo diuergit, atque ab eadem regione Cuphis fluuius deſcendit, et in Ponticum mare prope Necropyla ad Criuproſopon promontorium effunditur. Magna eſt miſeria, vbi in auctores huic ſimiles incidimus. Tamen ſuperanda etiam illa moleſtia eſt. Superari autem nullo modo poteſt, niſi ſi recordemur, quod ſaepenumero monui, quam formam geographiae iſtius nonnulli nobis traditam reliquerint. Eſt illis Caucaſus ad boream remotiſſimus, Caſpium mare paene ad boream Ponti Euxini, inter vtrumque coniunctio exſtitiſſe viſa. Inde facile fuit Theophani, vt Volgam et Tanaim eodem alueo confluentes deduceret in Pontum. Cuphin ad Necropyla exonerari ait, quod minime contemno: Cuphin item ab Volga et Tanai, quod eſt perridiculum. Modo vbi tam vanus eſt Theophanes, non item Cuphis oſtia eum fefellerint: ni id acciderit, neceſſe eſt, vt quaeramus Cuphin eodem nomine fluuium alium in Aſia. Geographus Rauennas (3): *per Chazirorum patriam plurima transeunt flumina. inter cetera fluuius maximus Cuphis.* Nihilo hoc aduerſum videtur Theophani, niſi Rauennas Chazariae Nouem climata in Aſia reſpexit, cum mox ſubiungit Lazicam. At, ſi Menandrum Protectorem videas (4), Cuphis paludibus miſcetur, neque ita procul ab Alania eſt, immo ad orientem Tanais. Quare is Cuphis Menandri alius eſt, quam hic Conſtantini. Nicephorus

 Con-

(3) p. 134. (4) p. 109.

Conſtantinopolitanus (5) vt Theophanes: περί τὴν Μαιῶτιν λιμνην κατὰ τὸν Κώφινα ποταμὸν καθίςαται ἡ πάλαι λεγομένη μεγάλη Βȣλγαρία, *circa Maeotin paludem iuxta Cophina fluuium eſt olim dicta magna Bulgaria.* Bene quod περὶ τὴν Μαιῶτιν, at Theophanes diſertius, cum Necropylis miſceri tradit. Nomen ſine dubio Turcicum eſt, ſiue a كوف *Küf*, *mucore*, ſiue a كوف *Küſ* et كوف *Kuf bubone*, *noctua.* Proxime ante Cuphin Conſtantinus recenſet Αλμαται. Quodſi Delislium audimus, is fluuius hodie nomen ſeruat *Alma.* Nihil eſt veroſimilius. Quare cum Bogus, Cuphis, Alma, naturali ſitus ordine ponuntur, ſequitur *Hybul* et *Syngul* ita ſuccedere, vt proximus ad Tanaim ſit Syngul. *Hybul* e MS. Bandurii, erat enim a Meurſio Υψȣλ editum.

Remorabitur nos adhuc Danapris ſeu Boryſthenes. Necropyla ſinus ad Danaprin iam ſic ſatis notus. In promontorio orientali ad oſtia fluminis exonerantis ſe in ſinum, τὰ Αδαρα *Adara* (6), locus vicinior Necropylis, quam flumini. Illa in palude, quam Danapris et Bogi oſtia efficiunt, propius ad mare *S. Aetherii inſula* fuit (7): ab hac aduerſo Danapri nauigabatur ad alteram S. Georgii (8). Porro occurrebat aduerſo flumine πέραμα τȣ̃ Κραρίȣ, ἔχον τὸ μὲν πλάτος ὅσον τȣ̃ Ιπποδρομίȣ, *Crarii traiectus*, *cuius latitudo vt Hippodromii*, altitudo ab inferiori parte, quantum oculi proſpicere poſſunt, et quantum iactus ſagittae ſpatium exigit. Latitudinem Hippodromii Conſtantinopolitani ςαδιάιαν fuiſſe reperio. Traiectum excipiebant cataractae ſeptem Boryſthenis. Φραγμȣ̀ς Con-

(5) p. 22. (6) Conſtantinus p. 113. (7) ib. p. 61. (8) p. 60.

Conſtantinus vocat (9). Et is quidem cataractas nominat a ſecundo flumine exorſus, non ab aduerſo, in quo nos nunc quaſi conſtitimus. Sequemur ordinem Conſtantini. Prima ſecundo flumine cataracta a Ruſſis et Slauis vocabatur Ἐσσȣπὴ *Eſſupi*: ipſe interpretatur, μὴ κοιμᾶσαι, *non dormi*. Anselmus Bandurius Raguſanus, Slauicae gentis decus, putat (10) legendum Νεσσȣπη *Neſſupi*. *Neſupi*, inquit, *noſtratibus ſignificat non dormitare*. Sic Raguſanis: Bohemis *Neſupey*, Sorabis Luſatiae *Neſpai*, vt Chriſtiani Schoetgenii V. C. amicus obſeruauit: (1) Ruſſi Неспи *Neſpi* dicunt. Quoniam in ceteris cataractis nomina Ruſſica a Slauis vehementer et toto genio diſcrepant, mirum eſt, hac in voce Ruſſos et Slauos conciniſſe. Vereor autem ne nomen Ruſſicum exciderit, vt ſolum Slauicum exſtet. Hanc cataractam Imperator ait, adeo anguſtam eſſe, ὅσον τὸ πλάτος τȣ̃ Τζυκανιςηρίȣ. Tzycaniſteria, in quibus Imperator cum nobilibus hominibus eques ludebat pila, duo Conſtantinopoli fuere: alterum vetus, alterum nouum: incertum quod dicat, et incertius quae alterutrius latitudo fuerit. De cataracta vero Imperator, μέσον αὐτȣ̃ πέτραι εἰσι ῥιζημαῖαι, ὑψηλαὶ, νησίων δίκην ἀποφαινόμεναι, *in cataracta rupes ſunt praeruptae et altae, quae tamquam inſulae ſpectantur*: ad has rupes allidi fluctus, et inde praecipitari. Secunda cataracta a Ruſſis vocata fuit Ουλβορσι *Vluorſi*, a Slauis Οςροβȣνιπραχ *Oſtrovuniprach*, interprete Conſtantino τὸ νησίον τȣ̃ Φραγμȣ̃, *inſula cataractae*. Bandurius *Oſctrobuniprag* legit, et *noſtratibus*, inquit, *acutum collis limen dicitur*. Sed non ita potuit falli Conſtantinus, cum in aula ſuos μεθερμηνευτὰς ſub diſpoſitione magiſtri offi-

(9) p. 59. &c. (10 In Conſtantinum de A. I. p. 37. (1) Originum Ruſſicarum Sect. III. p. 6.

officiorum haberet, ſuos δραγομάνȣς, vt tum dicebant. et illum ſuum praecipiua auctoritate μέγαν διερμηνευτὴν, qui explicare haec poſſent, cum deinde Conſtantinopolis ipſa afflaret Sclauis, aula complures admouiſſet officiis, adeo vt multas voces Slauonicas lingua Graeca adoptarit. Imperator hanc cataractam priori ſimilem fuiſſe ſcribit, quam inſularum ſpeciem retuliſſe dixerat: inde nomen cataractae Slauonicum. Ruſſi cataractam vocant порогъ *porog*: at vt me amicus Aſtracanenſis, Slauonice perquam doctus, certiorem reddidit, Slaui id ipſum прагъ *prag* enunciunt. Et Островъ *oſtrow* inſula eſt tum Ruſſice, tum Slauice, inde Cedreni (2) locum Οςροβȣ dictum puto. Eodem auctore Aſtracanenſi Slaui dicunt островной прагъ *Oſtrownoi prag*, ſed multo elegantius eis videtur островний прагъ *Oſtrowni prag*, vt ſit *inſularis cataracta*. Et hunc in modum Conſtantini Οςροβȣνι πραγ erit non *Oſtrowuni prag* legendum, ſed *Oſtrowni prag*, ita vt ȣ conſonantis vicem praeſtet. Tertia cataracta Γελανδρὶ Slauice explicat Imperator ἶχος Φραγμȣ̃ *ſonitum cataractae*. Nemo eſt, qui mihi hoc explicet: negant omnes Slauonicum eſſe. Idcirco credidi Ruſſicum nomen fuiſſe, et Slauonicum alterum, quod apponere ſolet Imperator, ſcribarum incuria excidiſſe. At Schoetgenii V. C. amicus: *Gelandri Bohemis eſt tumultus, ſiue ſonus furentium.* Apprime ad Conſtantini ſententiam. Quarta cataracta Ruſſis Αειφαρ *Aiphar*, Slauis Νεασητ *Neaſit*, a *pelicano*, qui inter ſaxa huius cataractae nidos habet. Nihil melius conſeruatum: eſt enim tam Ruſſis, quam Slauis Неясыть *Nejaſit*, *pelicanus*. Ita cum Inter-

(2) p. 705.

terpretes Alexandrini S. Dauidis Regis ſtropham conuertunt Graece (3) ὡμοιώθην πελεκᾶνι ἐρημικῷ, ἐγενήθην ὡσεὶ νυκτικόραξ ἐν οἰκοπέδῳ, Slauonicus interpres pro πελεκᾶνι *Nejaſit* poſuit. Quinta cataracta Ruſſis Βαρουφορος, Slauis Βουλνιπραχ *Vulniprach*, qui *paludem magnam* efficit. Amico cuidam et doctiſſimo et acutiſſimo viſum eſt ex волненной порогъ ſeu прагъ corruptum eſſe, vt ſit *cataracta fluctibus vexata*. Vt Schoetgenius obſeruatum reliquit, *wolny* Bohemis *expeditus*. Iam ſexta cataracta Ruſſis Λεαντι *Leanti*, Slauis Βερουτζη *Verutzi* βρασμα νερου *vertigo fluminis*: plane a Виръ *vir*, *vertigine* eſt виручїи *virutzi*, *vertigine actum*. Hiſtoriographus ad cataractas бѣлобережїя victum ſcribit a Pezenigis Suendoſtlaum: credo has ipſas eſſe, quas *Verutzi* vocat Imperator. Quare hoc Bandurius e MS. recte edidit, cum ante legeretur Βερόντζη *Verontzi*. Denique ſeptimae nomen cataractae Ruſſis Στρουβουν *Struvun*, Slauis Ναπρεζη *Napreſi*, μικρὸς Φραγμὸς, *parua cataracta*. Amicus noſter ſuſpicatus eſt, corruptum eſſe ex Напряги vel Напрещи *Napreſchi*, *intendere vela*, quod quidem in parua cataracta fieri potuiſſe veroſimile eſt. Mirum, quam Ruſſica vocabula nemo interpretari poſſit: adeo nihil Slauonici continent, vt ne ſonum quidem vel tenuem Slauonici oris. Incertum deinde adhuc, an Ruſſica illa nomina cum Slauicis ſignificatione congruerint. Sed de his alias.

Naturae iſtis quaſi veſtigiis ad diſponenda regionum nomina commode vtemur. Primum Chazaros in Europa,

(3) Pſalmo CII. v. 7.

pa, ſuis ſpatiis, vt tunc fuere, definiemus. Dixi eos in ſeptemtrionali regione Cherrhoneſi Tauricae coluiſſe. Ad hoc vsque tempus in قرم اطاس *Krim inſula* (vt nunc Tattari dicunt a veteri voce Κρημνὴ) ad orientem ſeu ad Boſporum Cimmerium, eſt تقيل كرش *Tekiel kirſch*, quod quamquam a *confluenti niue*, vi vocis videtur ductum, tamen fortaſſis corrupto ſono *Chazarorum* potius veterem memoriam conſeruat. Nihil aliud de hac gente dicam, quam quod vel maxime ad ſitum regionum pertinet: merentur enim res eorum peculiarem diſſertationem. Tenebant autem tantummodo interiorem Cherrhoneſum ad boream: littus omne a Cherſone ad Boſporum vrbem M. P. CCC. Romanorum fuit. Hoc *thema Cherſonis* dicitur Conſtantino in Thematibus (4): Κλίματα vero et vrbes Cherſonis κάστρα των κλιμάτων, in libro de adminiſtrando imperio (5). Diximus ex Herodoto, foſſam a Scythis ductam fuiſſe ad muniendam Cherrhoneſum. De hac foſſa ſic habet Conſtantinus (6). Veteres e Maeotide, foſſa in Necropyla ducta, vltro citroque nauigaſſe. Ὁ δὲ αὐτὸς κόλπος, inquit, τῆς Μαιώτιδος ἔρχεται ἀντικρὺ τῶν Νεκροπύλων τῶν ὄντων πλησίον τοῦ Δανάπρεως ποταμοῦ, ὡς ἀπὸ μιλίων δ′, καὶ μίσγεται, ἐν ᾧ καὶ σοῦδαν οἱ παλαιοὶ ποιησάμενοι διεβίβασαν τὴν Θάλασσαν, μέσον ἀποκλείσαντες πᾶσαν τὴν Χερσῶνος γῆν καὶ τῶν Κλιμάτων καὶ τὴν Βοσπόρου γῆν κρατοῦσαν μέχρι ά μιλίων, ἢ καὶ πλειόνων τινῶν. Subobſcura haec ſic interpretor: *Sinus occidentalis Maeotidis ſitus eſt e regione Necropylorum, quae ſunt ad Danaprin fluuium: diſtat autem ſinus ille M. P. IV. a Necropylis et miſcetur* (immo

(4) p. 30. (5) p. 113. (6) de A. I. p. 113.

(immo quondam miſcebatur ante Conſtantinum) *eo in loco, vbi veteres foſſa ducta traiecerunt mare: ea foſſa abſciderunt Cherſonem*, *Climata* (ſeu littora Cherſoneſi a Cherſone ad Bosporum vrbem) *et Bospori vrbis agrum* (a continenti Scythiae) *is denique littorum a Cherſone ad Bosporum circuitus fuit M. P. cl). et amplius.* Sic e Maeotide nauigatio in Necropyla longe breuior fuit, quam ſi littora illa totius Cherrhoneſi circumnauigarent. Hanc puto eſſe ſententiam verborum: nullam enim aliam reperio. Illa autem foſſa Conſtantini aetate adeo fuit obſtructa et obruta humo, vt denſam ſyluam ferret. Duae per hanc ſyluam viae: vna Cherſonem petere ſolebant Pazinacitae et Climata Cherſonis, altera Bosporum. Non autem tantummodo ad Cuphin vsque littora Graeci tenuere, ſed etiam vsque ad Danaprin. Nam inter Danaprin et Cherſonem ſalinae et portus Cherrhoneſitarum fuere, ἀπὸ μὲν τοῦ Δαναπρεως ποταμοῦ μετὰ Χερσῶνος εισι μιλια τ'. ἐν τῷ μέσῳ δὲ λίμναι καὶ λιμένες εισιν, εν αἷς Χερσωνῖται τὸ ἅας ἐργάζονται (7), *a Danapri vsque ad Cherſonem ſunt M. P. CCC. in medio paludes et portus*, *in quibus Cherſonitae ſalem et conficiunt et diuendunt.* Eſt enim extrema vox ambiguae ſignificationis, ita, vt altera ſignificatio ad paludes et ſalinas referatur, altera ad portus. Hos portus neceſſe eſt vltra Necropyla haud longe a Boryſthene fuiſſe, quia Necropyla ipſa nullo modo nauigari poſſe Conſtantinus teſtatur. Iam Dio Chryſoſtomus de his ad Boryſthenis oſtia ſalinis (*) ταύτη δὲ καὶ ἁλῶν εςι τὸ πλῆθος, ὅθεν ὁι πλείους τῶν βαρβάρων λαμβάνουσιν, ὠνούμενοι τοὺς ἅλας. Καὶ τῶν Ελλήνων καὶ Σκυθῶν

Ddd 2

(7) P. 113. (*) In Boryſthenitica p. 437.

θῶν οἱ Χεῤῥόνησον οἰκοῦντες τὴν Ταυρικήν. *Hic vero etiam ſalis eſt copia, vnde plerique barbari ſalem petunt venduntque. Et Graeci quoque Scythaeque, qui Cherrhoneſum incolunt Tauricam.* Inde a Boryſthenis oſtiis ad Crarii traiectum videntur adhuc Cherſoneſitae coluiſſe: Conſtantinus enim ait (8): eo traiectu, Pazinacitas, qui ad occidentem fluminis agebant, traieciſſe in Cherſonem, Cherrhoneſitas vero in Ruſſiam. Et cum alibi de legatis tradit (9), morem hunc fuiſſe ſcribit, cum per Pazinacitas Conſtantinopolin ventitarent, vt Cherſone ſubſiſterent, donec vltro citroque obſidibus datis deducerentur a Pazinacitis: ergo ad traiectum Cherſoneſitae pertinuerunt, ne opus eſſet, vt a Chazaris quoque commeatum peterent legati. Iterum Pazinacas Cherſoni vicinos fuiſſe ſcribit Imperator (10) et alibi (1), vicinos τῷ μέρει τῆς Χερσῶνος, ita vt impreſſionem facere poſſent, cum vellent. Vt illo in loco de Patzinacia occidentali loqui videtur, ita in altero plane de orientali fatus eſt. Illa ad Crarii traiectum finitima erat Cherſoni, Boryſthene fluuio intercedente: haec ad orientem eius traiectus, contermina fuit parti Cherſonis, ſuccedentibus deinde Chazaris, qui reliquam Cherſonem et Climata a Pazinacitis orientalibus ſeparabant. Loqui autem Imperatorem de orientalibus, manifeſtum eſt. Nam cum paullo ante de Pazinacitis Bulgarorum, Ruſſorum, et Turcarum vicinis, hoc eſt, de occidentalibus diſſeruiſſet, huic ſermoni ſubiungit: ὅτι καὶ ἕτερος λαὸς τῶν Πατζινακιτῶν τῷ μέρει τῆς Χερσῶνος παράκειται, *etiam alter populus Pazinacitarum parti Cherſonis adiacet.* Igitur inde a Crarii traiectu et ad cataractas,

(8) p. 60. (9) p. 57. (10) p. 55. confer Cap. VII. (1) p. 57.

ctas, Pazinacitae occidentales Chazaris collimitabant. Cataractis vtique Pazinacitae praetendebantur. Nam cum Ruſſorum nauigationem deſcribit Imperator, ad cataractarum orientalem ripam excenſionem feciſſe ſcribit, et Pazinacitas tamquam infenſiſſimos hoſtes vehementer cauiſſe, eamque ob cauſſam, ne opprimerentur, egiſſe excubias (2). Alio loco quem infra adferam, diſertius ſcripſit, quemadmodum Pazinacitae Ruſſos iſthic circumuenire ſint ſoliti. Tradit deinde ad Crarii traiectum Pazinacitas ſaepenumero excepiſſe Ruſſos, nauium claſſe oppoſita. Hi vero iam occidentales ſunt Pazinacitae. Qui limites Chazarorum et Pazinacitarum deinceps fuerint, non inuenio: videntur autem non ita prorſi fuiſſe, quam transuerſi a Cuphi flumine ad Tanaim. Nam ad Tanaim Chazaros pertinuiſſe liquet, quia ad eum fluuium munitiſſimum caſtellum *Sarkel* tenuerunt, cuius ſitum arcis ſi explorauerimus, iam quoque fines Chazariae ad borapelioten definitos tenebimus. Σαρκελ e Chazarorum lingua Imperator graece edidit Ασπρον Οσπίτιον, *Album Hoſpitium.* Leontius Byzantius (3): Σάρκελ Λευκὸν ὄικημα, *Alba domus.* Linguam Chazarorum Turcicam fuiſſe reperio. Iam شهر *Scher vrbem* ſignificat, كل *Kil*, *lutum*, *argillam.* اقشهر *Akſcher*, *Alba vrbs* in Rumaea ſ. Aſia minori, corrupte اقصار vt Abulfeda indicat. Nam cum ad aedificandum caſtrum *Sarkel* eo in loco non eſſent lapicidinae, furnos conſtruxerunt, et lateribus coctis calceque e vicini fluminis minutiſſima glarea, ἐκ μικρῶν τινων καχλιδίων materiam pararunt, teſte Conſtantino. In condendo caſtro Graeci, ſeu, quia ita maluerunt dici, Romani opem tule-

(2) p. 60. (3) p. 76.

tulerunt. Conſtantinus: ὁ Χαγάνος ὁ ϗ Πεχ Χασαρίας, quae verba aliter interpretari non poſſumus, quam, *Chaganus Chazariae, qui etiam Pech dicitur*: tamen cum addit Imperator, εἰς τὸν Βασιλέα πρέσβεις ἀποστειλαντες, et quae ſunt deinceps, ipſa nos neceſſitas cogit, vt emendemus ϗ ὁ Πεχ. Tum praeterea hoc ipſa ratio ſuadet. Diuerſi enim ſunt *Chaganus* et *Pech*. Vt خاقان *Chakan* apud Turcicas gentes Imperatorius atque Regius titulus fuit, quo maior eſſet nullus, ita بك *Beg* tantum Principis et Ducis, qualem in Sogdiana Alexandri M. aetate fuiſſe Bochurn illum puto. Et ita eſſe ſcribendum, Leontius Byzantius, aut quisquis is eſt, qui iuſſu Conſtantini Imp. res Theophili Imp. ſcripſit, demonſtrat (5): ὅ τε Χαγάνος Χαζαρίας ϗ ὁ Πὲχ πρὸς τὸν Αὐτοκράτορα ἔπεμπον πρεσβευτάς. Vbi Chazarorum Rex et Begus quidam, ſeu gentis Chazaricae Princeps, legatis miſſis Theophili Imp. opem implorauerunt, is τὸν Σπαθαροκανδιδάτον Πετρωνᾶ, τὸν ἐπονομαζόμενον Καματηρὸν et cum eo τον Κατεπάνω Παφλαγονιας cum chelandiis operisque ad condendum caſtellum *Sarkel* miſit. Clariſſimus Delislius *Sarkel* ponit ad fontes *Donez*, ſeu Tanais minoris. Cauſſas edidit hasce: eſſe iſthic vrbem *Bielogrod*, quod nomen ipſum *Sarkel* ſeu *Albam vrbem* exprimat, et cum Conſtantinus ſcripſit, ad fontes Tanais conditum eſſe caſtellum, videri ſibi veteres hunc potiſſimum *Donez* Tanaim vocaſſe. Tradere enim Imperatorem fontes Tanais e Riphaeis montibus oriri; at *Don* maiorem illum vbi primum ſcaturit, montes habere nullos in vicinia: denique ſi Sarkel ad Tanais maioris fontes, non ad minoris conditum fuerit, trecentis

(5) p. 76.

tis et amplius milliaribus a Chazaria diſſitum fuiſſe, quod vero non ſit ſimile. Haec Delislio ita ſunt viſa. In re ipſa doctiſſimo viro adſentior. Inuenio enim Pazinacas ſupra Donezum ad Tanaim alterum egiſſe, eo Sarkel non potuit ad huiusce Tanais fontes in Chazarorum poteſtate eſſe. At cum Donetzi ripam ſtrigam obiectam Pazinacis haberent Chazari, fontes eius contra eosdem, vt antea contra Turcas, quamuis cognatos ſuos, munitos habuerunt. Leontius Byzantius: ἔςι καλὰ Τάναϊν ποταμὸν, ὃς τὲς Παλζινακίτας ἐνλεῦθεν, ϗ αὐλὲς διείργει τὲς Χαζάρες ἐκεῖθεν, *caſtrum eſt ad Tanaim, qui fluuius Pazinacitas inde, atque hinc ipſos Chazaros diſterminat.* Nihil magis perſpicue dici poteſt, vt Donetzum eſſe putemus, quem Imperator vocauit Tanaim. Iam Conſtantinus ſcripſit (6), Petronam a Danubio euectum, iter dierum ſexaginta feciſſe ad hunc locum. Si, vt erat Herodoti aetate nauigatio Graecorum (7), longo die LXX. millia orgyiarum noctu LX. millia confecta ſunt et a faucibus Ponti ad Phaſin, quae maxima Ponti longitudo eſt, Herodotus ipſe diebus nouem, octo noctibus nauigauit, qui potuit Petronas totos dies ſexaginta conſumere in hoc curſu? Herodotus ex dierum interuallo concludit, Ponti longitudinem eſſe ἕνδεκα μυριάδας ϗ ἑκαλὸν ὀργυιέων hoc eſt, orgyias 1110000. (vbi e Laurentii Vallae verſione a Iacobo Gronouio relictum eſt: *centum et decem millia orgyiarum et centum*) ſiue ςάδιοι ἑκαλὸν ϗ χίλιοι ϗ μύριοι hoc eſt 11100. ſtadia. Hic tametſi Herodotus ſummam venti opportunitatem nactus fuerit, tamen vel aduerſo quemadmodum ſexaginta

(6) l. c. (7) L. IV. c. 86.

ginta dies nauigauerit a Danubio ad fontes Tanais Petronas? At tum Theophanis Continuator, tum Conſtantinus ſcribunt, a Danubio profectum petiiſſe Cherſonem, iſthic res compoſuiſſe et ſuscepiſſe operas, inde circumuectum eſſe Cherrhoneſum. Mora illa aliquid temporis requiſiuit. Tamen vel ſic longum iter fuit, videturque in primis Tanais retardaſſe, praeſertim cum ad fontes vsque nauigandum eſſet. Sic conſtituto ſitu caſtri *Sarkel*, fines Chatzariae intra Donetzum, Tanaim, Cherrhoneſi littora, et cataractas Boryſthenis incluſimus.

Pazinacitas ſupra Chazaros a Tanai ad Boryſthenem, inde vero ad Danubium coluiſſe demonſtrabo. Regio ipſa Conſtantino Πατζινακία, populus et ipſi et Leontio Byzantio Πατζινακῖται, ceteris fere, vt Cedreno, Symeoni Lagothetae, Leoni Grammatico Πατζινάκαι. Luithprando Ticinenſi (8) *Pizenaci*: iisdem enim temporibus, paullo tamen ante Conſtantinum ſcripſit: *Conſtantinopolis habet ab aquilone Hungaros, Pizenacos, Chazaros, Ruſſos*, Eggehardo Vragienſi (9), *Pezinegi* et *Pecenati*, *Pedenei*, *Pedinei Pezineigi*. Monacho Trium Fontium (10) *Pezenatae*, forte *Pezenacae*. Hic eſt ille populus Ruſſicis monumentis et Polonicis celebratus Печенѣги *Peczenigi*, ſeu vt nunc in Vcrainia a Slauis pronunciari audio *Peczenihi*. Gens digna, cuius res aliquanto accuratius explicentur: nunc tantum horum temporum regiones Patzinacicas definiemus. Quas regiones antea tenuerint, vt pulſi traiecerint Tanaim, ſupra diximus. Nunc ab Alania diſtabant ſex dierum itinere,

(8) p. 92. ed. Reuberi. (9) p. 420. 220. 451. (10) p. 225.

itinere, ab Vzia quinque (1). Quis mihi negabit, Patzinacas ſupra Donetzum ad Tanaim pertinuiſſe, vnde viciniores Vzi, paullo magis diſſiti Alani. Ab Ruſſia, inquit Conſtantinus, Pazinacae vnius itinere diei abfuere. Igitur ad Boryſthenem infra Kiouiam ſic collocandi ſunt, vt vnius diei iter inter vrbem atque agrum Pazinacicum interſit: inde ad Crarii traiectum, vt ſupra diximus, Cherſon excepit. Imperator (2): ὅτι καὶ τοῖς Ρῶς οἱ Πατζινακίται γείτονες καὶ ὅμοροι καθεςήκασι, *Ruſſis etiam Patzinacitae finitimi et contermini ſunt.* Tum addit, ſemina illa bellorum inter Ruſſos et Patzinacitas, quae nobis veteris Ruſſicae gloriae cauſſa commemorandae ſunt eius verbis:

Καὶ πολλάκις, ὅταν μὴ πρὸς ἀλλήλους εἰρηνεύουσι, πραιδεύουσι τὴν Ρωσίαν καὶ ἱκανῶς αὐτὴν παραβλάπτουσι καὶ λυμαίνονται. ὅτι καὶ οἱ Ρώς διὰ σπουδῆς ἔχουσιν εἰρήνην ἔχειν μετὰ τῶν Πατζινακιτῶν. ἀγοράζουσι γὰρ ἐξ αὐτῶν βόας, καὶ ἵππους, καὶ πρόβατα, καὶ ἐκ τούτων εὐμαρέςερον διαζῶσι καὶ τρυφερότερον. ἐπεὶ μηδὲν των προειρημένων ζωων ἐν τῇ Ρωσία καθίςηκεν. ἀλλ' οὐδὲ πρὸς ὑπερορίους πολέμους ἀπέρχε-

Et ſaepe, cum inter ſe pacem non colunt, depraedantur Ruſſiam, et admodum agunt feruntque: quare Ruſſi diligenter pacem cum Patzinacitis ſeruant: nam ab iis boues, equos, et oues mercantur, et inde iam commodius lautiusque victitant: nam neque boues, neque oues, aut equi in Ruſſia ſunt. Ac ne quidem ad bella ſupra fines (puto bella cum borealibus populis aut cum orientalibus et Slauis ὑπερόρια dici) *omnino exire poſſunt*

(1) Conſtantinus Imp. l. c. p. 106. (2) p. 55.

θαι δύνανται ὅλως οἱ Ῥῶς, εἰ μὴ μετὰ τῶν Πατζινακιτῶν εἰρηνεύοντες, διότι δύνανται ἐν τῷ ἐκείνους τῶν οἰκείων ὑποχωρεῖν, αὐτοὶ ἐπερχόμενοι τὰ ἐκείνων ἀφανίζειν τε καὶ λυμαίνεσθαι. διὸ μᾶλλον ἀεὶ σπουδὴν οἱ Ῥῶς τίθενται διά τε τὸ μὴ παραβλάπτεσθαι παρ᾽ αὐτῶν, καὶ τὸ ἰσχυρὸν εἶναι τὸ τοιοῦτον ἔθνος συμμαχίαν παρ᾽ αὐτῶν λαμβάνειν καὶ ἔχειν αὐτοὺς εἰς βοήθειαν, ὡς ἂν καὶ τῆς ἔχθρας αὐτῶν ἀπαλλάττωνται καὶ τῆς βοηθείας καταπολαύοιεν. ὅτι οὐδὲ πρὸς τὴν βασιλεύουσαν ταύτην τῶν Ῥωμαίων πόλιν οἱ Ῥῶς παραγίνεσθαι δύνανται, εἰ μὴ μετὰ τῶν Πατζινακιτῶν εἰρηνεύοντες, οὔτε πολέμου χάριν, οὔτε πραγματείας. ἐπειδὴ ἐν τῷ μετὰ τῶν πλοίων εἰς τοὺς φραγμοὺς τοῦ ποταμοῦ γίνεσθαι τοὺς Ῥῶς, καὶ μὴ δύνασθαι διελθεῖν, εἰ μὴ ἐξαγάγωσι τοῦ ποταμοῦ τὰ πλοῖα αὐτῶν, καὶ ἐπὶ τῶν ὤμων βαστάζοντες διαβήσωσιν. ἐπιτίθενται τότε αὐτοῖς οἱ τοῦ

Ruſſi, niſi cum Patzinacitis pax ſit, quia Pazinacitae poſſunt, cum Ruſſi ſuis finibus excedunt, irruere, Ruſſicum agrum peſſundare et deuaſtare. Ideo magis ſemper maximum ſtudium in eo poſuerunt Ruſſi, ne a Pazinacitis laedantur, ſed vt potius, cum haec gens tam valida eſt, ab ea ſubſidia impetrent et opem, ſimulque vitent eius hoſtiles impetus, et auxiliis ſubmittendis perſruantur: nam Ruſſi quoque ad Imperatoriam hanc Romanorum vrbem, (Conſtantinopolin) niſi cum Pazinacitis pacem habeant, proficiſci non poſſunt, neque belli cauſſa inferendi, neque mercandi: cum enim Ruſſi in nauibus ſuis ad cataractas Boryſthenis veniunt, neque tamen tranſire poſſunt, niſi ſi e flumine naues ſuas ſubducant, et humeris portent, donec praetergreſſi ſint cataractas, tum Pazinacitae eis inſidiantur, et multo facilius, cum duos labores Ruſſi per-

toi-

τοιέτε ἔθνες τῶν Παλζινακιτῶν ᾗ ῥαθιως ἅτε προς δύο πόνες ἀνλέχειν, μὴ δύνανται, τροπενλαι, καὶ καλασφάζονλαι.

ferre non poſſunt (portandi humeris ſcaphas ſuas et pugnandi) *in fugam vertuntur, et clade accepta ſuccumbunt.*

Adiiciam alium locum huic ſimilem, e Conſtantino Porphyrogenneta (3):

Οτι τε βασιλέως Ρωμαίων μελὰ τῶν Παλζινακιτῶν εἰρηνεύονλος, ἔτε Ρῶς πολέμε νόμῳ καλα τῆς Ρωμαίων ἐπικραλειας, ἔτε οἱ Τερκοι δύνανλαι ἐπελθεῖν, ἀλλ᾽ ἔτε ὑπὲρ τῆς εἰρήνης μεγαλα καὶ ὑπέρογκα χρήμαλά τε ᾗ πράγμαλα παρὰ τῶν Ρωμαίων δύνανλαι ἀπαιλεῖν, δεδιότες τὴν διὰ τε τοιέτε ἔθνες παρὰ τε βασιλέως καλ᾽ αὐλῶν ἰσχὺν, ἐν τῷ ἐκείνες καλὰ Ρωμαίων ἐκςρατέυειν, οἱ Παλζινακιται, καὶ τῇ πρὸς τον βασιλέα Φιλίᾳ συνδέμενοι, ᾗ παρ᾽ ἐκείνε διὰ γραμμάτων ᾗ δώρων ἀναπειθόμενοι, δύνανλαι ῥαδίως κατὰ τῆς χώρας τῶν τε Ρῶς καὶ τῶν Τέρκων ἐπέρχεσθαι καὶ ἐξανδραποδίζεσθαι τὰ τέτων γύναια

Quando Imperator Romunus cum Pazinacitis pacem colit neque Ruſſi aperto bello contra Romanum Imperium mouere poſſunt, neque Turcae: immo ne quidem pro pace danda magnam et intolerabilem vim pecuniae, resque alias item intolerabiles a Romanis exigere poſſunt, metuentes Pazinacitarum ab Imperatore contra ſe excitatam potentiam: eo enim tempore, cum Romanos bello premunt, Pazinacitae et coniuncti Imperatori amicitia, et ab eo litteris muneribusque exorati, regionem Ruſſorum et Turcarum inuadunt, et in ſeruitutem abripiunt coniuges liberosque eo-

(3) p. 53.

γυναῖκα καὶ παιδάρια, καὶ ληΐζεσθαι τὴν χώραν αὐτῶν. — *rum, et totum agrum deuaſtant.*

Quod aït Imperator, Ruſſos magnam vim pecuniae pro pace a Romanis exegiſſe, hoc vero Ruſſicorum monumentorum fidem confirmat, cum grandem pecuniam pro pace a Conſtantinopolitanis expreſſam tradunt. Cum autem ſcribit, etiam alias res magnas et intolerabiles popoſciſſe, hoc quid ſit, alio loco declarat (4). Nam praefatus, quanta opum et quam inſatiabili cupiditate boreales gentes ſint, quam petitiones eorum et mandata intolerabili impudentia, ſic ait: εἴτε ἀξιώσουσί ποτε καὶ αἰτήσωνται εἴτε Χάζαροι, εἴτε Τοῦρκοι, εἴτε καὶ Ῥῶς, ἢ ἕτερόν τι ἔθνος τῶν βορείων καὶ Σκυθικῶν, οἷα πολλὰ συμβαίνει, ἐκ τῶν βασιλείων ἐσθήτων, ἢ στεμμάτων, ἢ στολῶν, ἕνεκά τινος δουλείας καὶ ὑπουργίας αὐτῶν ἀποσταλῆναι αὐτοῖς, οὕτω χρή σε ἀπολογήσασθαι, *cum volent, et petent, ſiue Chazari, ſiue Turcae, aut Ruſſi, aut alia aliqua ſeptemtrionalis et Scythica gens, vt ſaepe accidit, ex regiis veſtibus, aut diadematibus, aut ſtolis, pro ſeruitio et miniſterio ſuo ſibi mitti, ita oportet te excuſare.*

De ſitu Pazinacîtarum alibî Conſtantînus (5): ἡ δὲ Πατζινακία πᾶσαν τὴν γῆν τῆς τε Ῥωσίας καὶ Βοσπόρου κατακρατεῖ, καὶ μέχρι Χερσῶνος, καὶ ἕως τὸ Σαράτ, Βουράτ καὶ τῶν λ΄ μερῶν. Quem locum ſic explico: *Pazinacitas omnem regionem intra Ruſſiam et Bosporum tenuiſſe*, videtur enim μέχρι excidiſſe, cum fuerit antea μέχρι τῆς τε Ῥωσίας. Bosporum dicit regiones veteres

(4) p. 63. (5) p. 105. 106.

res Boſporanas, vbi nunc Chazari et Cherrhoneſitae. Μέχρι Χερσῶνος, id ipſum confirmat, quod ſupra oſtendi, Patzinacitas iuxta Cherſonem ad cataractas quoque egiſſe. *Sarat* et *Burat* ſunt regiones Pazinacitarum maxime orientales ad Tanaim, vbi etiam triginta regiones paruae fuiſſe videntur. Nam Pazinacitae antequam e Transuolganis regionibus pulſi ſunt, in octo κλίματα ϗ θέματα *regiones* diuiſi fuere: manſere in eadem conditione etiam poſtea. Et ad occidentem Danapris fuere quatuor: πέρα τοῦ Δανάπρεως ποταμοῦ πρὸς τὰ ἀνατωλικότερα ϗ βορειότερα μέρη ἀποβλέποντα πρὸς τε Ουζίαν ϗ Χαζαριαν ϗ Αλανιαν ϗ τον Χερσῶνα ϗ τὰ λοιπὰ κλίματα, *trans Danaprin fluuium ad orientaliores et borealiores partes reſpiciebant Vſiam, Chazariam, Alaniam, et Cherſonem, ceterasque regiones*. Regiones, ſeu populos quatuor, duobus locis recenſet, nominibus diuerſis:

Κουαρτζιτζουρ	Τζουρ
Συρουκαλπεη	Κουλπεη
Βοροταλματ	Ταλματ
Βουλοτζοσπον	Τζοπον

Si ordine naturali poſuit, primi ad orientem *Quartzitzur*, ſeu *Tſchur*, et *Syrucalpei*, ſeu *Kulpei*: tum ad ſeptemtrionem *Vorotalmat*, ſeu *Talmat*, et *Vulotſchospon*, ſeu *Tſchopon*. At hunc ordinem non ſequitur: nam alibi *Quartzitzur* ad Boryſthenem collocat, ex aduerſo Cisboryſtheniticae regionis *Jawdiertim*. Supra citato loco maxime orientales regiones, in quibus deſiit Patzinacia, Σαρατ et Βουρατ, videntur eſſe *Syrucalpei* et *Vorotalmat*. Reliquas duas, *Quartzitzur*, ad Boryſthenem, vt Impe-

(5) p. 105, 106.

rator poſtulabat, conſtitui, *Vulotzoſpon*, pro arbitrio meo.

Venio ad Patzinaciam occidentalem, quam dixi a Boryſthene ad Danubium protendi. A Danaſtri ad Danaprin N. P. LXXX. litus, ὁ Χρυσός λεγόμενος Αἰγιαλός, *Aureum littus*. S. Aetherii inſulam iam ſupra ſuo loco vindicaui. Inde ſoluentibus Ruſſis, quorum iter Conſtantinus deſcripſit (6), primus a dextera Ασπρός ποταμός *Albus fluuius* occurrebat: ſecundum eum *Selina* fluuius τοῦ Δανουβίου παρακλάδιον *Danubii ramus* ſeu oſtium. *Selinam*, inquit Delislius, *non diuerſum eſſe a Saulina fluuio*, *iudico*, *quem tabula MS. maris Pontici*, *Conſtantinopoli deſcripta*, *ad vnum ex oſtiis Danubii exhibet*, *quamuis hunc Danubium inter et Boryſthenem fluere colligi ex Conſtantino poſſe videatur*. Immo cum Conſtantinus παρακλάδιον Danubii vocat, nihil iam reliquum eſt, quam vt in ſententiam Delislii concedamus. Quod ad Aſpron, Delislius, cum fluuium nullum inter Danaſtrin et Danubium reperiret, eo nomine ſinum quendam inſigniuit. Credo ego tamen fluuium fuiſſe et eum vero, de quo Geographus Rauennas (7): *ex Sarmatiae montibus flumen venit*, *quaſi ad partem Danubii*, *qui dicitur Appion*. Forte *Aſpron* facili litterarum errore. Eſt etiam Διστρα commemorata Imperatori (8): ἀπὸ δὲ κάτωθεν τῶν μερῶν Δανούβιου ποταμοῦ, τῆς Δίστρας ἀντιπέρα ἡ Πατζινακία παρέρχεται καὶ κατακρατεῖ ἡ κατοικία αὐτῶν μέχρι τοῦ Σάρκελ, τοῦ τῶν Χαζάρων κάστρου, *ab imis Danubii fluminis regionibus*, *e regione Diſtrae* Patzi-

(6) p. 61. (7) p. 160. (8) p. 111.

Patzinacia procedit et pergit eorum ſedes vsque ad Sarkel Chazarorum caſtrum. Delislius putauit fluuium dici: at vrbem Diſtram citat Imperator. Celebris vrbs Διςρα, Δρίςα, Δρὶςρα, Δρίςον multis ſcriptoribus. *Olim Doroſtolum Moeſiae inferioris vrbs ad Iſtrum*, vt recte obſeruauit Anselmus Bandurius. Anna Comnena (9) Δρίςρα πόλις ἡ περὶ των Ιςρον διακειμένων περιφανης. Cedrenus (10) τὸ Δορόςολον, ὃ ϗ Δρίςρα καλεῖται. Ad fluuium ſitam eſſe, etiam Cedrenus confirmat. Menologium Baſilii Imp. (1) Πασικράτης καὶ Βαλεντῖνος ὑπῆρχον ἐκ τῆς πόλεως Δωροςόλου τῆς Καππαδοκιας. Recte Clemens XI. P. R. interpretatur: *ex ciuitate Doroſtolo in Macedonia.* Nam Menologium alio loco (2): Δάδας, Μάξιμος ϗ Κιντιλιανὸς ὑπῆρχον ἐκ τῆς πόλεως Δοροςόλου τῆς Μακεδονίας. Sed accuratius alibi (3), ἐκ πόλεως Δοροςόλου Μυσίας τῆς Θρακης et Δορόςολον τῆς Θράκης. Recte prout tempora fuere: nunc enim ad Bulgariam pertinebat. Selinam fluuium excipiebat Κώνοπα *Conopa*, ſed ad Bulgariam Nigram pertinens, tum Conſtantia vrbs, et Βάρνας, ſeu *Varna*, fluuius, nota nomina, et *Ditzina* fluuius, vt Imperator ait, vicinus Varnae. Iam vt idem teſtatur, Pazinacitae ad auſtrum e regione Doroſtoli colebant. Alio loco ſcribit (4), Pazinacitas ſex horarum interuallo a Bulgaria abfuiſſe: intererat enim Danubius, et aliquantum agri, quem Pazinacitae reliquerant incultum, veluti munimentum contra Bulgaros. Iterum tradit (5), a Bulgaria ad Danaſtrin vsque et Danaprin coluiſſe, et quidem diſertis verbis, ad littora

(9) Alexiados p. 194. (10) p. 674. 675 Conf. Zoraram T II p. 212. (1) T. III. p. 68. (2) ib. p. 75. (3) ib. p. 172. 191. (4) p. 106. (5) p. 58

littora ipſa, vt in littora inde a Danubio ad Danaprin nihil iuris fuerit Imperatori Romano. Ea cauſſa Ruſſi, cum Conſtantinopolin nauigiis ſuis peterent, inde a S. Aetherii inſula excenſionem facere non audebant, donec Selinam eſſent praetergreſſi. Pazinacitae enim ſua in regione nauium curſum obſeruabant, ſi quas earum poſſent intercipere. Vt a Bulgaris Danubii ripa ſtriga ſeparabantur, ita qui limites magis ad occidentem fuerint, exquiram. Imperator fluuios in Danubium ſeſe exonerantes recenſens (7), quinque ex iis Pazinacitis adſcribit, Βαρȣχ, Κȣβȣ, Τρȣλλος, Βρȣτος, Σερετος. Et *Brutus* quidem vel vocis ſono cognoſcitur: eſt enim *Porata* Herodoti, nunc *Prut*. *Seretus* quoque nunc *Siret*, ergo Herodoti *Ararus*. In ceteris haeremus. Delislius credidit *Trullum* et *Varuch* eſſe fluuium *Maroſch*, in quo ei minimo adſentior, cum *Maroſch* ſine dubio is eſt, qui a Conſtantino *Moriſis* vocatur. Quare Varuchum puto Alutam eſſe: Trullum, qui fere ex aduerſo in Danubium incidit. Ad Alutam vsque Pazinacitae degerunt. Nam inde iam, vt poſtea declarabo, flumina Turciae ſuccedunt. Cum autem Pazinacitae dicuntur quatuor dierum via diſtare a Turcis, (8) id interpretor e Conſtantino (9) de ſolitudine inter Pazinaciam et Turciam, quam Pazinacitae hieme deſerebant: ſub verem a Danapris regionibus reuerſi totam aeſtatem exigebant prope Turcas. Toto tractu ab Varucho et Danubio ad Danaprin Pazinacitarum climata quatuor exſtiterunt, aliis alibi nominibus dicta Conſtantino (10), τὰ δυτικώτερα καὶ ἀρκτικώτερα ἔνθεν τȣ Δανάπρεως.

Για-

(6) p. 61. (7) p. 108. 110. (8) p. 58. 59. (9) p. 106. (10) - - -

Γιαζιχοπὸν	Χοπον
Χαβȣξιγγυλα	Γυλα
Χαροβοη	Χαροβοη
Ιαβδιερτιμ	Ηρτην

Gjazichopon ſeu *Chopon*, πλησιάζει τῇ Βȣλγαρίᾳ *accedit ad Bulgariam*, tum τὸ κάτω, *infra Chopon* erant *Gyla* proxime Turcas. *Charavoi* iuxta Ruſſos, itaque ad Boryſthenem, denique *Jawdiertim*, ſeu *Irtin*, proximo Slauos, Ruſſorum tributarios. Populi *Jawdierlim*, *Chavuxingyla* ſiue *Gyla* et in altera Pazinacia *Quartzitzur* vno nomine ſe vocabant Κάγγαρ *Cangar* (1), hoc eſt, ἀνδρειότατȣς ϗ ἐυγενεςέρȣς *fortiores et nobiliores* (2).

Horum climatum ad boream ſitus ita explicandus eſt nobis, vt ſimul Ruſſiae fines ingrediamur. Iis in finibus Imperator Kiouiam ponit, vnius itinere diei a Pazinacitis τὸ κάςρον Κίοβα τὸ ἐπονομαζόμενον Σαμβατας (3), *vrbs Kiova cognomine Samwatas*. Vrbs ſane tota Europa ipſoque in Oriente celebris. Nolo hic iam Dithmari Merſeburgenſis, Adami Bremenſis aliorumque de ea proferre impenſe aggeſtas laudes. Naſſireddinus Tuſaeus (4) et Olugbeg in tabulis geographicis prouinciam ponunt روس *Rus*, et in ea كويابه مدينة روس *Kujavah vrbem Ruſſiae*. Apud Olugbegum corruptius, non modo in Ioannis Grauii, ſed etiam in Ioannis Hudſonis editione كويا *Cuja*. Credas Cujauiam vrbem in palatinatu

(1) p. 106. 107. (2) Vide cogitata Strahlenbergii de hoc *Cangar* in Introductione *Septemtrionalis et Orientalis Europae et Asiae* p. 65. (3) p. 59. (4) p. 45. ed. Grauii.

Cuiauienſi dici: ſed eſt plane Conſtantini Κιοαβα, aut vt ille etiam habet Κιοβα *Kioua*. Eggehardo Vragienſi (5) *Kitawa* et *Cuiewa*. Aliis aliter corruptum. Eggehardus ad A. C. 1018 *In hac magna ciuitate Kitawa*, *quae caput eſt huius regni*, *plus trecentae eccleſiae habentur et nundinae octo*, *populi autem ignota manus*. Conſtantinus Imperator (6) de ſitu Ruſſiae ἐις δὲ τὰ ὑψηλότερα τȣ̃ Δανάπρεως ποταμȣ̃ μέρη κατοικȣ̃σιν ὁι Ρω̃ς, *ad ſuperiores partes Boryſthenis fluuii colunt Ruſſi.* Infra vrbem ad Danaprin erat τὸ Βιτεζεβη, ὅπερ ἐςι πακτιωτικὸν κάςρον τω̃ν Ρω̃ς, ſine dubio, vt Slauoni enunciarunt, *Vitepski Ruſſorum vrbs tributaria*. Nullum vrbis veſtigium reperio ad Danaprin. Vrbs eſt illo nomine in Lithuania ad fontes Dunae, a qua totus palatinatus Vitepskenſis: nihil autem ad hanc Kiouienſem. Praeterea vrbes in Ruſſia Imperator nominat (7) Μιλινίσκα, Τελιȣτζα, Τζερνιγωγα et Βȣσεγραδε. Βȣσεγραδὲ *Viſegardia* ſeu *Wyzgrod* haud ita longe a Kiouia et Τζεργιγωγα eſt *Czernichow* ad Desznam fluuium. Μελινισκαν Delislius credidit *Mſenesk* eſſe. Cum autem Imperator ab hac vrbe naues Kiouiam veniſſe ſcribit, non ſane eſt *Mſenesk*, quae vrbs a fluuiis remotior eſt: Sed ſi nominis in veſtigio pedem figas, eſt *Smolensko*. Τελιȣτζα quae fuerit non inuenio: quare praetermittendam potius duxi, quam cum Delislio incerto ſtatuendam loco. Iam ἀπὸ τη̃ς ἔξω Ρωσίας, inquit, μονόξυλα κατερχόμενα ἐν Κωνςαντινȣπόλει, ἐισὶ μὲν ἀπὸ Νεμογάρδας, ἐν ὡ̃ Σφενδοσθλάβος ὁ ὑιὸς Ιγγωρ, τȣ̃ ἄρχοντος Ρωσίας, ἐκαθέζετο, *ab exteriori Ruſſia lintres deſcendunt Conſtantinopolin: ſunt autem ab Nemo-*

(5) p. 427. 451. (6) 112. (7) p. 59.

mogardas, *vbi Suendoſtlabus filius Ingoris principis Ruſſiae conſedit.* Νεμογαρδας eſt ſine dubio Νεογαρδα, *Neogrod* ſeu *Nouogrod.* Credidi initio eſſe, quod Delislio viſum, *Nouogrod Sieuirsky* haud ite longe a *Czernigoga.* Et quamquam, quod ex Ruſſicis monumentis conſtat, haec quoque vrbs in poteſtate Ruſſorum cum tota Sieueria fuit, tamen potius cenſeo eſſe *Nouogrod Weliki*, et circumiectum agrum τὴν ἔξω Ρωσίαν dici. Nam in Ruſſicis monumentis inuenio, Suendoſtlabum, ita vt Imperator ſcribit, illa in Nouogardia egiſſe. Nouogrodienſes merces ſuas conuehebant Smolenſcum, inde ſecundo Danapri lintribus Kiouiam: qua ex re ortus Conſtantini Imp. error, vt etiam Nouogrodum crederet ad Danaprin ſitum fuiſſe.

Proxime Ruſſos Kiouienſes, eorum tributarii Slauoni egerunt, ſupra Pazinacitarum regionum *Jawdiertim.* Nominantur Conſtantino Ουλτινοι Δερβλενινοι, Λενζενίνοι καὶ λοιποὶ Σκλάβοι (8). Forte Δρεβλενίνες Imperator ſcripſit. Noti in hiſtoriis tum Ruſſicis, tum Polonicis Древляне *Drewliani*, voce ducta a *ligno et ſyluis.* Λενζινίνοί, ſeu, vt alibi Λενζαννῆνοι, forte vt putat amicus meus, лѣсные, *Lisnie*, *ſylueſtres.* Κριβιτζοι ſeu Κριβηταινοὶ (9) *Crivitzi*, *Criviteni*, noti item Ruſſicis hiſtoriis Кривичи *Crivizi.* Horum ſitum ſatis accurate tenemus. Nam cum Pazinacitarum ſedes ad boream ita produximus, vt haud procul ab Kiouia abſimus, regioni autem *Jawdiertim* illi ipſi Drewliani, Lenzinini, et Crivitzi vicini fuiſſe dicuntur, ſequitur eos ad Pripelium ſeu *Pripiecz* fluuium fuiſſe. Hoc egregie confirmat Imperator,

 cum

(8) p 106. (9) p. 59.

cum ſic ait de illis populis: ἐις τὰ ὄρη αὐτῶν κόπτουσι τὰ μονόξυλα ἐν τῷ τοῦ χειμῶνος καιρῷ καὶ καταρτήσαντες αὐτῶν, τοῦ καιροῦ ἀνοιγομένου, ἡνίκα διαλυθῇ ὁ παγετὸς, ἐις τὰ πλησίον οὔσας λιμνας εισάγουσιν αὐτὰ καὶ ἐπειδὴ ἐκεῖναι εισβάλλωσιν εις ποταμὸν τὸν Δάναπριν, ἀπὸ τῶν ἐκεῖσε, οὗτοι εἰς τὸν αὐτὸν ποταμὸν εἰσέρχονται καὶ ἀπέρχονται εἰς τὸ Κιέβα καὶ σύρουσιν εἰς τὴν ἐξάρτησιν καὶ ἀπεμπολοῦσιν αὐτὰ ἐις τοὺς Ρὼς, *in montibus ſuis caedunt lintres hieme et fabricant, tum vere, vbi ſoluta nix fuerit, in proximas paludes deducunt et quia illae paludes in Danaprin ſe exonerant, inde iam et ipſi flumen per paludes ingreſſi Kiouiam nauigant, lintres educunt, et vendunt Ruſſis.* Montes aut potius ſupercilia, ſyluas, paludes ad Pripelium inuenimus: Pripelium ipſum Danaprin dixit, quia illo flumine miſcetur. Drewliani igitur et Lenzinini in primis ob vim nominum illis in montibus et ſaltibus egiſſe videntur ad paludes. De Vltinis nihil occurrit, quod dicam. Proxime Criuizos Βερβιανοὶ Δρουγουβῖται et Σερβιοὶ *Veruiani, Druguuitae et Seruii* Ruſſorum tributarii collocantur. Hi videntur vniuerſi ſub iſtis paludibus coluiſſe vsque ad Crapaticos montes, in quibus Chrovati fuere. Lubet locum integrum huc referre. Hiemem, inquit, ſic agunt Ruſſi Kiouienſes. Nouembri ineunte, ἐυθέως οἱ αὐτῶν ἄρχοντες ἐξέρχονται μετὰ πάντων τῶν Ρῶς ἀπὸ τόν Κιαβον καὶ ἀπερχονται ἐις τά πολίδια, ἃ λέγεται Γυρα, ἤγουν ἐις τὰς Σκλαβινίας τῶν τε Βερβιανων καὶ τῶν Δρουγουβίτων καὶ Κριβιτζων καὶ τῶν Σερβιων καὶ λοιπῶν Σκλαβων, οἵτινές εἰσι πακτιῶται τῶν Ρῶς, *illico proceres exeunt Kiovia cum omnibus Ruſſis* (puta cum omni militari manu et nobilitate, relictis iu vrbe ci-

ciuibus) *et in vrbes, quas Gyra vocant, coucedunt, ſiue etiam in Slauinicam regionem Veruianorum, Druguuitarum, Criuizarum et Seruiorum ceterorumque Sclauorum, qui Ruſſorum ſunt tributarii.* Exacta hieme, Aprili menſe Kiouiam redire et mercaturas Byzantias exercere conſueuerunt.

Qui populi Ruſſos ad orientem contigerint, in Conſtantino non inuenio, niſi ſi eo referendi ſunt Morduani. Μοϱδία Conſtantini a finibus Pazinacitarum decem dierum via abfuit (10). Ex quo colligere poſſumus, iisdem in ſaltibus iam tum egiſſe Morduanos, in quibus nunc ſunt. Legebatur in MS. Meurſii Μοδία, ex quo Meurſius coniecturam duxit Μηδίαν eſſe. Neſcio quid in eo ſit, quod placuerit Bandurio, praeſertim cum in MS. Regio Pariſino legeret Μορδίαν. Delislius *Modiam* retinuit et intra Caucaſum deſcripſit, cum aſteriſco, quo incomperti ſitus loca inſigniuit. Credo eum quoque Meurſii Mediam reſpexiſſe.

Diſcedamus nunc e Ruſſia in Bulgariam, quam a tergo reliquimus. Bulgaria Nigra a Danubio ad Haemum montem pertinuit. Vrbes in ea multae, cum primis vero Πρέσθλαβον (1), *Pereslaue.* Zonaras (2) et Cedrenus (3) τὴν μεγάλην Περσθλάβαν καὶ τὴν μικρὰν commemorant. Μεγάλη Περίσθλαβα ad Iſtrum. Anna Comnena deſcripſit (4): Πόλις δ᾽ αὕτη περιφανὴς περὶ τὸν Ἴστρον διακειμένη πολὺ μὲν οὔτ᾽ ὄνομα τοῦτο ἔχουσα τὸ βαρβαρικὸν, ἀλλ᾽ ἑλληνίζουσα περὶ τὴν προσηγορίαν Μεγαλόπολις

(10) p. 59. (1) p. 109. (2) p. 224. (3) p. 704. (4) p. 194.

ϗ ȣ̃σα ϗ λεγομένη. ἀφ' ȣ̃ δὲ Μέκρος ὁ τῶν Βȣλγάρων βασιλεὺς καὶ οἱ ἐξ ἐκείνȣ γενόμενοι τῆς ἑσπέρας κατέδραμον, σύνθετον ἐκτήσατο τὴν προσηγορίαν ἀπό τε τῆς Ελληνικῆς σημασιας, Μεγάλη ἐπονομαζομένη, καὶ τὴν ἀπὸ τῶν Σθλαβογενῶν ἐπισυρομένη λέξιν, Μεγάλη Περισθλαβα πανταχόθεν τȣ̃τοις Φημιζομένη, *vrbs haec celebris ad Iſtrum ſita, nomen peregrinum olim non geſſit, ſed Graeco nomine Megalopolis dicta, re etiam fuit: ex quo Mocrus Bulgarorum rex et eius poſteri occidentem incurſauere, compoſitum nomen habuit a Graeco* Μεγάλη *et Slauonico* Μεγάλη Περισθλαβα, *vbique celebrata et nuncupata.* Conſentiunt Zonaras (5) et Ioannes Curopalata Scylitzes, ſiue magis Cedrenus (6), qui haud ita longe a Doroſtolo ponunt. Nicetas Choniata in Iſaacio Comneno (7) Περισθλαβα πόλις Ωγυγία ἐκ πλίνθȣ πᾶσα ὁπλῆς καὶ πλείστην ὅσην περὶ τὸν Αἷμον τον περίμετρον ἔχȣσα. *Periſthlava vrbs Oggya, tota latericia et maximam partem in circuitu ſuo ſuper Haemo ſita.* De Haemo iterum Cedrenus et Zonaras conſentiunt in rebus Ioannis Tzimitzis, qui vrbem Suendoſtlauo Regi Ruſſiae eripuit. Ex eo tempore Αχριδα regia Bulgarorum fuit (8). Nota duoque in Bulgaris Πλισκοβα, eodem nomine, quo haec Pleſcouia non ita longe a nobis ſita eſt (9). Ad occidentem fines Bulgariae coniuncti fuere finibus Turcicis.

Turcae antea iuxta Chazaros coluere, iisdem quibus Pazinacitae in hac tabula deſcripti ſunt ſpatiis. Inde pulſi ſunt

(5) T. II. p. 224. (6) T. II. p. 672. ſeq. (7) p. 238. (8) Cedrenus p. 710. Zonaras p. 713. (9) Cedrenus p. 704.

ſunt circiter A. C. 893. vt e Conſtantino demonſtrauimus. Conſentiunt in anno Regino Prumienſis et Eggehardus Vragienſis, aliique, ſed *Hungaros* vocant. Nam etiam ſuperioribus ſeculis, cum noſtri de Hunnis aut Hungaris loquuntur, Graeci fere Τȣ́ρκȣς dicunt, rarius Οὔννȣς καὶ Οὔγγρȣς. Quare cum horum populorum memomoria ſeu apud noſtros ſcriptores, ſiue apud Graecos occurrit, cauenda eſt offenſio. Conſtantinus hos Turcas etiam Chazaros appellat (10): ὅτι καὶ Μαύρη λεγομένη Βȣλγαρία δύναται τοῖς Χαζάροις πολεμεῖν, *Bulgaria Nigra poteſt etiam bellum gerere cum Chazaris.* Nullos, inquam alios dicit, quam hos Turcas, qui vt Chazari ipſi, ab eadem ſtirpe vno ſermone vſi ſunt. Omnia enim nomina, tum regionum et vrbium, tum hominum et rerum, Turcice explicari poſſunt ſine negotio. Quare, vt teſtatur Imperator (1), hi Turcae enixe colebant Turcas, πρὸς τὴν ἀνατολὴν, εἰς τὰ τῆς Περσίδος μέρη, *ad orientem iuxta Perſarum regionem* et ad eos aſſidue mittebant negotiatores aut mandata ab iis petebant. Haec eſt تركستان *Turkeſtan*: hi ſunt, quos Εῴς Τȣ́ρκȣς vocat Cedrenus (2). Notandus autem eſt noſtrorum haud leuis error, cum Hungaros, qui nunc Slauis permiſti colunt, nomine non ſuo vocant, iisque omnia tribuunt, quae de Hungaris vsquam prodita fuere. Nos igitur more et conſuetudine noſtrorum Hungaros vocabimus: ipſi ſe *Magyar* verius ad hiſtoriae fidem appellant. Neque tamen hi Mazari quidquam commune habent, cum iſtis Turcis, qui Conſtantini aetate coluere in Pannonia, vt ne quidem cum Hunnis vetuſtis. Sed hoc nunc non agimus. Continebantur

(10) p. 62. (1) l. c. p. 108. (2) p. 696.

bantur autem Turcae iſti fluminibus, in quibus Imperatore teſte (3), primus Τιμησης *Timiſis*: notus adhuc fluuius ad Temeſuariam: tum Τὀτης *Tutis* qui ſit, neſcio. At Μορησης *Moriſis* eſt *Maroſch*, Geographi Rauennatis *Maruſcus* (4), pro quo in codice Vrbinate bibliothecae Vaticanae eſt *Mariſcus*, Herodoti Μάρις. Κρισος *Criſus*, qui ſit, alii mihi monſtrent: nam Τίτζα eſt *Theyſſe*. Imperatore teſte, magna Turcarum pars ad orientem Tizae et Moriſis coluere. Ad boream Turcis vicini fuere tum Pazinacitae, tum Chrovati. *Harvat* et *Hravat* (5) Crovati ſeſe vocant: inde Crapatici et Carpatici montes. Conſtantinus (6): πρὸς τὸ βορειότερον μέρος οἱ Παζινακιται, ὁ δὲ Χρωβατοι πρὸς τῷ ὄρη τοῖς Τούρκοις παράκεινται, *ad boream Pazinacitae, Chrovati vero in montibus iuxta Turcas colunt.* Hi ſunt Crapatici ſeu Carpatici montes, *Hravatici* ſeu *Harvatici.* Populus ipſe Ioanni Zonarae Κράβατοι (7), vt nunc etiam *Cravatos* vocamus, Χόρβατοι Cedreno (8). Nomen Conſtantinus e Francica lingua explicare ſibi eſt viſus (9): οἱ τὴν πολλὴν Χώραν κατέχοντες *qui multam regionem tenent.* Lucius et Bandurius (10) negant hodie quidquam ſignificare. Bohemi dicunt *hravati*, *terram raſtro proſcindere* et *hrabe raſtrum*: Ruſſi hodie eiusmodi aliqua voce, *ſumma vi laborare.* Vltra Βαγιβαρείαν erant Βελοχρώβατοι ſub Ottone M. Imperatore, aut vt iis ait, *Franciae rege.* Anselmus Bandurius: *Bagibarias vocabulum Slauum eſt Graece detortum, id eſt*

(3) p. 108. 110. (4) p. 144 (5) Vberior explicatio doctrinae Chriſtianae in Illyricam linguam conuerſa per Tomeum Marnauitium, Romae typis Congregationis de propaganda fide A. 1627. *u yazik haruatski xapouidyu.* (6) p. 62. (7) p. 227 t. 11. (8) p. 717 (9) p. (10) ad Conſtantinum de A. I. p. 91. 92.

id eſt Βαϐειαορια (*Babia oria*) *id eſt*, *Babii montes*, *Slaue*, *Babie gore*, *id eſt*, *vetulae et vetularum montes*, *quo nomine Carpatici montes Poloniam ab Hungaria disterminantes ab aliquibus dicuntur*. Elegans coniectura, niſi potius putabimus Βαγι ϐάρειαν dictam a *Vaga* flumine, quod in Danubium exoneratur. Βελοχρώϐατοι ab Imperatore etiam Ασπροι Χρωϐάτοι vocati, quod ipſum бѣло *bielo* in Slauonicis linguis ſignificat. Horum pars ante Conſtantini Porphyrogennetae tempora Iſtrum traiecit, et tum in Dalmatia, tum in Illyrico conſedit. Iſtis ad ſeptemtrionem finibus Turcae deſcripti, vicinos ad occidentem habuere Francos (1). Vt ait Imperator, ἡ Φραγγία ἡ καὶ Σαξία *Francia*, *quae et Saxonia*. Nam vt Otto M. e Saxonibus fuit, ita huius quoque nomen regionis cognoſci, et cum Francia permiſceri Conſtantinopoli potuit. Non modo Albi Chrovati deuicti ab hoc Ottone, ſed alii quoque in Dalmatia Chrovati, extremae prouinciae imperii Germanici fuerunt, Conſtantino teſte. Ad meridiem Imperator Turcis iungit τὴν Μεγάλην Μοραϐίαν *Magnam Morauiam*, τοῦ Σφενδοπλόκου regionem. Hoc obſcurum eſſe poſſet, niſi adderet, totam regionem Sphendoploci quondam magni a Turcis deuaſtatam teneri (2). Erat autem Morauia proprie ſic dicta, regio Slauonici populi ad Morauam fluuium: (3) tum vero agrum omnem vltra Danubium ad Crapaticos montes terramque interiectam inter Danubium et Σαϐα ſeu *Sauum* comprehendebat. (4) Magnam illam Morauiam vniuerſam poſtea Turcae tenuerunt. Μετὰ δε τὴν τελευτὴν τοῦ αὐτοῦ Σφενδοπλόκου ἕνα χρόνον ἐν εἰρήνῃ διατελέσαντες,

(1) p. 110. (2) p. 108. 111. (3) Conſtantinus p. 111. (4) ib.

ἔριδος καὶ στάσεως ἐν αὐτοῖς ἐμπεσούσης, καὶ πρὸς ἀλλήλους ἐμφύλιον πόλεμον ποιήσαντες, ἐλθόντες οἱ Τοῦρκοι τούτους παντελῶς ἐξωλόθρευσαν καὶ ἐκράτησαν τὴν αὐτῶν χώραν, εἰς ἣν καὶ ἄρτιως οἰκοῦσι, *poſt mortem autem eiusdem Suentoploci vno anno pacem inter ſe coluere Suentoploci filii, tum vero ortis diſſidiis et inteſtino bello, Turcae ſuperuenientes hos plane disperdiderunt, regionemque eorum occupatam ad hunc diem tenent.* Moraui, qui cladi ſuperfuere, eodem teſte, disperſi ſunt per Bulgariam, Chrobatiam, ceterasque nationes: quidam inter Turcas conſederunt. Albericus in Chronico ad A. C. 893. *His diebus gens Vngarorum ſub primo duce ſuo Alino ex Scythia egreſſa ac a Pezenatis* (forte ſcripſit *Pezenacis*) *pulſa, Auaribus eiectis Pannoniam inhabitare coepit.* Adfert deinde ex Liuthprando et Sigeberto Gemblacenſi teſtimonia. Et Sigebertus quidem res ad eundem annum refert: Liuthprandus ipſo in ingreſſu hiſtoriae attingit, ſed ſine anno. Eggehardus Vragienſis (5): *Zuendibolh rex Marahenſium Slauorum, vir inter ſuos prudentiſſimus et ingenio callidiſſimus, diem clauſit extremum.* Et interiectis nonnullis: *regnum Zuendebalchi, filii eius pauco tempore infeliciter tenuerunt, Vngaris omnia populantibus.* Regino Prumienſis vero, quem alioqui Eggehardus ſequitur, ad A. C. 894. *Circa haec tempora Zundibolch, rex Marahenſium Slauorum, vir inter ſuos prudentiſſimus et ingenio callidiſſimus, diem clauſit*

(5) p. 231. ed. Eccardi.

ſit extremum: cuius regnum filii eius pauco tempore infeliciter tenuerunt, Vngaris omnia vsque ad ſolum populantibus. Vides ipſa Reginonis verba apud Eggehardum: tamen cum ab anno Eggehardus diſceſſit, iuſtam cauſſam habuiſſe videtur. Hanc autem cauſſam fuiſſe video, quod Suendoplocum Eggehardus inuenit A. C. 893. diem obiiſſe ſupremum, et vno poſt anno, vt Conſtantinus quoque auctor eſt, Hungaros ſiue Turcas occupaſſe Morauiam. Igitur A. C. 893. aut paullo ante, Turcae a Pazinacitis pulſi, nec ſane illico fracti, vt erat gens bellicoſa, intra Boryſthenem et Danubium ſeſe continuere, denique impreſſionem in Pannoniam fecere ab Arnolpho Imp. excitati contra Morauos, A. C. 894. Regiones vero inter Danubium et Boryſthenem iam antea tenuere, quam e regionibus Transboryſtheniticis eiecti ſunt, et quidem ſi Reginonem Prumienſem audiamus, iam A. C. 889. niſi tum primum motus Pazinacitarum coegerint magis ad Boryſthenem atque vltra fluuium, Danubium verſus, cedere.

In regione Turcarum Pons Traiani quoque fuit, et Βελαγραδα *Belagrada* (бѢлогородъ *Alba vrbs*, *Vueiſſenburg*) tribus diebus a ponte. Cedreno (6), ὁ τῶν Βελογραδων ἄρχων commemoratur. Notum etiam tum Sirmium ad Sauum fluuium. Vnum praeterea e Conſtantino animaduerti velim, Chrobatos quoque ad meridiem

(6) p. 716.

ridiem Turcarum poni. Hos puta Chrovatos in Dalmatia, Illyrico, et Pannonia, ſeiunctos a reliquo corpore. Σερβλοι Ασπροι, *Servli Albi*, vt ipſe Imperator e Latina lingua explicat, Δȣλοι *Servi*, ea tempeſtate in regione Βοικι *Voiki* fuerunt, proxime Francos et Chrovatos Albos. Latius deinde ad meridiem Slauoni coluere. Sed nos vlteriora Danubii non item ad noſtram curam pertinere iudicamus. Nam hoc officio, illuſtrandis e Conſtantino Porphyrogeneta Ruſſiae finibus et vicinis populis, defuncti, nihil vltra moramur Sclauos. Tamen quidquid de eorum ſitu adhuc dixit Conſtantinus, e Delislii tabula noſtrae adiecimus, ne quid deeſſe videretur.

OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE.

OBSERVATIO
ECLIPSIS LUNARIS

die 8. Septembris 1737. ſt. n. Petropoli habita.

REFERENTE

G. Heinſio.

§. 1.

EClipſes lunares vſu ſuo, qui eximius alias in Aſtronomiam et Geographiam redundat, nonnihil priuari videntur, quod iſtarum obſeruationes ad ſummam exactitudinem exigere non liceat. Cauſa praecipua quaeri debet in vmbrae terreſtris termino, qui propter adiacentem penumbram denſam admodum incertus conſpici ſolet. In diuerſis quoque Eclipſibus vmbra diuerſae denſitatis, vt ſic dicam, deprehenditur. Haec in eclipſi praeſenti non ſolum valdè diluta apparuit, ſed cum penumbra quoque tantum confundebatur, vt ſucceſſum obſeruationis fere deſperaremus. Huic incommodo acceſſerunt aliae circumſtantiae, quae obſeruationem magis dubiam reddiderunt. Fuit Eclipſis horizontalis luna ad occaſum vergente, ſiquidem et initium tantum et nonnullas phaſes ante obſcurationem maximam, quae ſub ipſo fere lunae occaſu contigit, obſeruare potuimus. Vapores in vicinia horizontis, praeſentia luminis crepuſcularis, mutatio diſci lunaris in figuram oualem, quae ad horizontem ex refractionis diuerſitate in exiguis diſtantiis oriri ſolet, dubiam ſane obſeruationem reddere valent. Licet autem poſtremo incommodo mutationis diſci medelam attulerimus; ob cauſas tamen ante allegatas, praeſertim male termi- Tab. XVII. et XVIII.

terminatae vmbrae, obſeruationem incertitudine ſua prorſus exuere non licuit. Quae praeſtita fuerint, ex ſequentibus patebunt.

OBSERVATIO
ECLIPSIS LUNARIS
d. 8. Septembr. 1737. ſt. n.

Ordo obſeruat:	*Tempus verum.* h ′ ″	*Momenta obſeruationum.*
1.	15. 49. 0	Penumbra iam apparet.
2.	16. 0. 0	Penumbra denſa ad limbum lunae prope Ariſtarchum videtur.
3.	16. 5. 48	Initium colligitur ex notabili luminis decremento ad limbum lunae in diſtantia 5. grad. ab Ariſtarcho verſus Platonem computata,
4.	16. 9. 17	Limbus lunae in puncto ingreſſus ante notato diſparet prorſus. Nullus autem terminus inter vmbram et penumbram diſtingui poteſt.
5.	16. 17. 48	Vmbra ad Ariſtarchum.
6.	— 18. 47	Ariſtarchus lumine ſuo priuatur. Per Tubum 8. pedd. haec Ariſtarchi diſparitio 16.″ citius viſa eſt. Terminus inter vmbram et penumbram nondum certus.
7.	— 24. 0	Galiléus extinctus
8.	— 24 50	Phas: 1. 2. dig: 5.′
9.	— 25. 5	Plato vmbrae totus immerſus
10.	— 30. 25	Phas: 11. 2. dig: 26.′

Ti-

	h ′ ″	
11.	16. 23. 3.	Timocharis obſcuratus
12.	— 35. 54.	Phaſ. III. 2. dig. 56.′
13.	— 37. 36.	Eudoxus vmbra inuolutus
14.	— 40. 28.	Copernicus totus in vmbra
15.	— 40. 54.	Phaſ. IV. 3. dig. 24.′
		Poſthaec Luna inter craſſiores nebulas in vicinia horizontis recondita vlteriorem obſeruationem prohibuit; vnde et phaenomenum iſtud rarum, quo in Eclipſibus horizontalibus luminaria ſimul ſupra horizontem conſpiciuntur, obſeruari non potuit.

§. 2. Circa obſeruationes praecedentes ſequentia notari debent. Tempus verum ad examen trium horologiorum inter ſe probe conſentientium per culminationes Solis d. 8. et 9. Septembr. determinatum eſt. In obſeruationibus 1. 2. 3. adhibitus fuit tubus aſtronomicus 8. pedum; in obſeru. 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, Tubus Newtonianus, obſeruante Cl. *Liberto*; vnde cum per omnes obſeruationes terminus vmbrae valde incertus fuerit, maiora autem teleſcopia vmbram dilutiorem repraſentent, obſeruationum exactitudinem ſufficientem afferere vix poſſumus. In obſeru. 3. initium vel potius luminis decrementum notabile 12. ſecund. ſerius, ſcilicet 16.^{h} 6.′ 0.″ per tubum Newtonianum obſeruatum fuit, ſed tempus ipſum initii, vt ex obſeru. 3. 4. patet, valde dubium remanet.

§ 3. Cum vmbrae terminus diſtinctior videretur per tubum minorem, ac per maiores; ad obſeruationes phaſium n. 8. 10 12. 15. elegi tubum quadrantis portatilis 2 pedum, easque, vt a refractione diſco lunae figuram oualem in vicinia horizontis inducente ipſae immunes ſint, ſequenti modo inſtitui. In foco Tubi Quadrantis extenſa ſunt fila V, H, ad angulos rectos ſe inuicem decuſſantia, quorum H in ſitum horizontalem, V in verticalem redigitur, quando ope perpendiculi e centro quadrantis ſuſpenſi planum quadrantis in ſitum verticalem componitur. Diſpoſito ſic quadrante obſeruaui interualla temporum quibus limbus lunae S in tubo aſtronomico apparenter ſuperior, cornu phaſis praecedens A et cornu ſequens B ad filum horizontale appulerunt. Cum enim in eadem altitudine refractiones ſint eaedem, dicta vero lunae loca ad eandem altitudinem ſucceſſiue perueniant, nihil de eo timendum eſt, quod alias ex diuerſitate refractionis originem ducit. Deprehenſum autem fuit interuallum temporis inter appulſum

Figura 1.

		ipſius S ad H et A ad H		ipſius A ad H et B ad H
in phaſi	1.	3.′ 45″	—	23″
	2.	3. 28½	—	38
	3.	3. 9	—	50
	4.	2. 54½	—	58

§. 4. Conditiones harum obſeruationum ſunt. In prima phaſi vmbra etiam per tubum iſtum minorem adhuc

huc male terminata apparuit. Obſeruationem phaſeos ſecundae certam habeo et reliquis omnibus antepono, vmbra ſatis bene terminata per tubum memoratum apparente. Phaſis 3tia, ob dubium praecedentis cornu appulſum ad filum horizontale, incerta eſt. Phaſis 4ta certa quidem, ſed cum iam nebulae in vicinia horizontis diſcum lunae inuoluerent, eam phaſi ſecundae poſtpono.

§. 5. Conſtructio harum phaſium ex obſeruationibus paecedentibus ſtatim expediri poſſet, ſi modo mora tranſitus diſci lunaris per filum horizontale daretur. Ductis enim rectis V*y*, H*y* ad angulos rectos ſe mutuo in *y* ſecantibus, quarum V*y* filum verticale, H*y* horizontale repraeſentat, ſi in ſcala aliqua, cuius partibus valor ſecundorum temporis tribuatur, linea aequalis capiatur morae tranſitus diſci lunaris per filum horizontale, eaque ex *y* in *r* transferatur, per *r* vero recta *r*R ad H*y*S parallela ducatur, patet, intra *y*S, *r*R parallelas contineri diſcum lunae expreſſum per partes temporis morae tranſitus eius per filum horizontale, ac proinde circulum ASB intra easdem tanquam tangentes deſcriptum lunae diſcum ſub dicta conditione referre. Si igitur ope eiusdem ſcalae *ya* aequalis fiat interuallo temporis inter appulſus limbi ſuperioris S et cornu praecedentis A ad filum horizontale; *ab* vero aequalis interuallo temporis inter appulſus cornuum praecedentis A et ſequentis B ad idem filum; per *a* et *b* deinde rectae *a*A, *b*B, ad HS parallelae ducantur peripheriam circuli ASB in A et B ſecantes; manifeſtum eſt, in A eſſe cornu praecedens, in B conſequens phaſeos quaeſitae, ac proinde iſtam facillime deſcribi poſſe, ſi ſemidiameter vmbrae detur. Figura 1.

§. 6. Requiritur ergo ad conſtructiones phaſium mora tranſitus diſci lunaris per filum horizontale et deinde ſemidiameter vmbrae. Priorem ex obſeruatione immediate acquirere non licuit; pars enim inferior diſci lunaris ad R eclipſata erat Igitur vt iſtam aliunde deducere poſſem, moram tranſitus diſci lunaris per filum verticale obſeruaui, eamque circa duas poſteriores phaſes 2.′ 20″½, inueni. Sed haec ſola non ſufficit. Requiritur praeterea vt habeatur mora tranſitus diſci lunaris per horarium. Hanc quidem per obſeruationem durante Eclipſi eruere conditio mutati per refractionem diſci lunaris prohibuit; iſta tamen, luna culminante, per tubum Sextantis muralis a Cl. *de L'Isle* probe obſeruata fuit 2.′ 4½″. Licet autem interea a culminatione lunae vsque ad eclipſin eius luna diametrum apparentem morae tranſitus per horarium reſpondentem reuera mutauerit, tum propter mutatum lunae locum in orbita, tum propter variatam eius declinationem, tum etiam propter viciniorem iſtius poſitionem ad horizontem; pro praeſenti tamen dubiarum, vt ſupra notaui, obſeruationum negotio moram tranſitus lunae per meridianum ſufficere, et neglecta mutatione, quippe, praeſertim cum per partes temporis exprimatur, admodum exigua, iſtam absque errore ſenſibili pro mora tranſitus lunae per horarium durante Eclipſi haberi poſſe iudicaui.

§. 7. Hisce iam inſtructus, mora ſcilicet tranſitus diſci lunaris per filum verticale, moraque tranſitus eius per horarium, inueſtigationem morae tranſitus lunae per filum horizontale ſequenti modo continuaui. Ductae ſint, Figura 2. vt ante lineae Vy, Hy, ad ſe inuicem normales, haec filum horizontale, iſta verticale, repraeſentantes. In ſcala aliqua,

aliqua, ſecunda vel ſemiſecunda temporis referente, capta ſit yS aequalis ſemimorae tranſitus diſci lunaris per horarium, et conſtructo exinde quadrato $ySDP$, centro D radio DP deſcriptus ſit circulus PSC, qui magnitudine exponit diſcum lunae per partes temporis morae tranſitus eius per horarium, poſitione vero lunam limbo ſuo apparenter ſuperiori S ad filum horizontale HS, limbo praecedenti P ad filum verticale VP ſimul appellentem. Ope eiusdem ſcalae ex D interuallo DI aequali ſemimorae tranſitus diſci lunaris per filum verticale interſecetur verticalis linea VP in I, iunctaque DI producatur, donec ſecet horizontalem lineam HS in K. Dico DIK eſſe diurnum lunae, quem centrum lunae in tubo aſtronomico (cuius repraeſentationi figura pro praeſenti negotio, luna ad occaſum vergente, accomodata eſt) apparenter aſcendendo percurrit; lineam vero DK magnitudine ſua ſemimoram tranſitus diſci lunaris per filum horizontale exhibere. Centrum enim lunae eſt in D tunc, quando limbus eius praecedens tangit lineam verticalem in P, et radius diſci lunaris aequalis factus eſt ſemimorae tranſitus lunae per horarium. Interea igitur, dum dimidium diſci lunaris traiicere debet lineam verticalem VP et centrum lunae ex D in eandem lineam transferri, patet, centrum lunae lineam deſcribere debere, quae ſit ad radium diſci lunaris, vt ſemimora tranſitus lunae per filum verticale ad ſemimoram tranſitus eius per horarium; ſpatia enim, habito lunae motu vniformi, propter conſtantem eius celeritatem ſunt vt tempora, quibus deſcribuntur; vnde cum DI ad DP vi conſtructionis dictam rationem habeat, luna au-

tem proxime in diurno feratur, manifeſtum eſt, poſitionem lineae DI eſſe ferè poſitionem diurni centri lunae. Mutatio declinationis pariter ac motus lunae proprius in aequatore ab occaſu verſus ortum hic nihil turbant, cum vtrumque inuoluat mora tranſitus et per filum verticale et per horarium, interim tamen notandum, quod DI ſit diurnus apparens, quam ſcilicet centrum lunae ex mutata declinatione percurrit, et quidem velocitate reſultante ex motibus communi et proprio in aequatore ad plagas contrarias directis. Sit igitur DI producta diurnus apparens centri lunae. Quoniam lunae centrum eſt in D, quando limbus eius ſuperior S tangit lineam horizontalem HS, patet, centrum lunae percurrere debere lineam DK et in K punctum interſectionis diurni cum horizontali HS transferri, interea, dum dimidium diſci lunaris lineam horizontalem traiicit; quare DK ſpatium a centro lunae in diurno interea deſcriptum magnitudine ſua ope ſcalae explorata tempus dimidiae morae tranſitus diſci lunae per filum horizontale exponet.

§. 8. Datur ergo per conſtructionem mora tranſitus diſci lunaris per filum horizontale. Sed eandem per calculum eruere licet. Datur ſcilicet ratio DI : DP eadem cum ratione morae tranſitus diſci per filum verticale ad moram tranſitus eius per horarium, eademque cum ratione DK : KS propter ſimilia DKS, DIP triangula. Datur praeterea DS radius diſci lunaris ſeu ſemimora tranſitus diſci per horarium. Problema igitur huc redit vt in triangulo DKS ad S rectangulo ex data baſi DS, dataque ratione hypothenuſae DK ad cathetum KS inueniatur hypothenuſa DK. Poſitis igitur DI : DP = $m : n$,

DS

DS $= a$, DK $= x$, fit KS $= \frac{nx}{m}$, $x^2 - \frac{n^2x^2}{m^2} = a^2$ et reducta aequatione x ſeu DK $= \frac{ma}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$.

§. 9. Vtroque modo tum per conſtructionem tum per calculum circa duas poſteriores phaſes ſemimoram tranſitus diſci lunaris per filum horizontale inueni 2′ 15″; circa duas autem priores phaſes moram tranſitus tum per filum verticale tum per horizontale paulum diuerſam, parum tamen a priori diſcrepantem ſumſi, propter mutatum interea diurni cum verticali angulum.

§. 10. Inuenta iam mora tranſitus lunae per filum horizontale, loca cornuum A, B in vnaquaque phaſi vel methodo §. 5. praeſcripta, vel etiam in praeſenti ſchemate fig: 2. in diſco lunae deſignari poſſunt, ſi in poſteriori caſu K α ope ſcalae aequalis fiat interuallo temporis inter appulſum limbi ſuperioris S et appulſum cornu praecedentis A, ad filum horizontale; et $\alpha\,\beta$ aequalis interuallo temporis inter appulſus cornuum praecedentis A et ſequentis B ad idem filum; per α et β vero ad HS parallelae A α, B β, agantur, diſci lunaris peripheriam in A et B ſecantes; quibus factis loca cornuum in A et B determinata ſunt.

§ 11. Definita ſic loca cornuum A, B, iungantur recta AB, et ad iſtam ex centro diſci D perpendicularis DF demittatur eaque verſus Z indefinite producatur. Et patet in linea DZ alicubi haerere centrum vmbrae, idque facile determinari poſſe puta in Z, ſi modo habeatur vmbrae ſemidiameter, interſecando ſcilicet ex A vel B interuallo ſemidiametri vmbrae lineam DZ in Z.

Hoc

Hoc centro radioque vmbrae ſi deſcribatur arcus A x B, habebuntur, phaſis obſcurationis A x B Q, poſitio eius reſpectu verticalis V P et diurni D K, ratio Q x : Q q ſeu ratio partis diametri lunae obſcuratae ad integram diametrum, hoc eſt quantitas phaſeos obſcurationis; nec non diſtantia centrorum lunae et vmbrae D Z.

§. 12. Hae deductiones, licet data omnia rite ſe habeant, phaſes exactas nondum ſiſtunt. Exactae eſſent, ſi peripheria vmbrae A x B interea temporis, dum cornua A, B, filum horizontale traiiciunt, immota fuiſſet. Aſt cum vmbra reuera iſto temporis interuallo intra diſcum lunae progrediatur, cornu ſequens non amplius in eo peripheriae diſci lunaris loco haeret, quando ad filum horizontale appellit, vbi in iſto temporis momento extitit, quo cornu praecedens ad filum horizontale appulit. Hac loci mutatione cornu ſequens priuari debet, vt phaſes exactae prodeant. Hunc in finem ſchema eclipſis praeſentis ſatis amplum modo conſueto conſtruxi, requiſitis ad iſtud ex calculo per Tab. aſtron. petitis. Inueſtigaui deinde phaſes ex obſeruatione per methodum hactenus traditam, ſumta vmbrae ſemidiametro ex calculo eâque ex data ratione ſemidiametri lunae ad radium vmbrae reducta ad partes diſci lunaris, per quas hactenus diſcus lunae expoſitus fuit. Has phaſes tanquam veras ſchemati Eclipſis conſtructo applicui. Quibus factis circa ſingulas phaſes promoto vmbrae centro in orbita eius viſa (habito lunae loco immoto) per tantum ſpatium, quantum interuallo temporis inter appulſus cornuum ad filum horizontale reſpondet, cognoui, qualem loci mutationem

tationem cornu ſequens in peripheria diſci lunaris interea ſubiit. Haec loci mutatio relata ad diurnum in ſchemate Eclipſis expreſſum innotuit proinde in partibus temporis, quae motui vmbrae interea facto reſpondent. Si igitur hae temporis partes addendo vel ſubtrahendo, pro ſchematis Eclipſis conditione, applicentur momento temporis in obſeruatione, quo cornu ſequens ad filum horizontale appulit; habetur proxime momentum temporis, quo cornu ſequens ad filum horizontale appuliſſet, quando vmbra, durante tranſitu cornuum per filum horizontale, immota in diſco lunae permanſiſſet. Differentia inter hoc momentum temporis correctum et tempus appulſus cornu praecedentis ad filum horizontale, ſi iuxta methodos §. §. 5. 10. 11. traditas tractetur, ad veram phaſeos quantitatem deducit.

§. 13. In praeſenti negotio factis experimentis, hactenus recenſitam correctionem tum propter exiguum inter appulſus cornuum temporis interuallum, tum propter poſitionem vmbrae reſpectu diſci lunaris hic fauentem, inſenſibilem eſſe, ac proinde phaſes per methodum ſupra traditam, omiſſa correctione, erutas pro veris haberi poſſe, deprehendi. Et haec etiam cauſa fuit, cur in obſeruatione phaſium appulſus cornuum ad filum horizontale, praeuiſa iſtorum commoda poſitione, elegerim prae appulſibus eorundem ad filum verticale, ex quibus alias pari methodo phaſes erui poſſunt a refractione non turbatae.

§. 14. Quoniam hac correctione momenti appulſus cornu ſequentis ad filum horizontale efficitur, vt vmbra a mo-

a momento appulſus cornu praecedentis vsque ad appulſum ſequentis quaſi immota perſiſtat; manifeſtum eſt, quantitatem phaſeos reſpondere momento temporis, quo cornu praecedens ad filum horizontale appulit. Et hoc modo intelligi debent momenta temporis, quibus in recenſione obſeruationis Eclipſis praeſentis phaſes ſupra adſcriptae fuerunt.

§. 15. Praemiſſis hisce, ſumtisque nunc cornuum appulſibus ad filum horizontale tanquam correctis, ad ſemidiametri vmbrae inueſtigationem, quam conſtructio phaſium requirit, progredior. Methodus, qua in obſeruatione phaſium vſus ſum, ad determinationem quoque ſemidiametri vmbrae deducit, ſi praeter appulſus cornuum ad filum horizontale, momentum quoque temporis obſeruetur, quando peripheria vmbrae ad idem filum appellit. Sint A, B cornua phaſis iuncta rectâ A B, A L B peripheria vmbrae tangens rectam D L E, quae filum horizontale repraeſentet. Ex A et B in D E demiſſae ſint perpendiculares A D, B E. Manifeſtum iam eſt, vi §. 5. interuallo temporis inter appulſum peripheriae vmbrae L ad filum horizontale et appulſum cornu praecedentis A ad idem filum, hoc cornu praecedens aſcendendo attolli per lineam A D; et eodem modo cornu ſequens B per lineam B E interuallo temporis inter appulſus peripheriae vmbrae et cornu ſequentis ad filum horizontale. Haec momenta appulſuum cornuum A, B, itidem iuxta §. 12. correcta intelligi debent, facta computatione a momento temporis, quo peripheria vmbrae appulit ad filum horizontale. Dantur ergo A D, B E expoſitae per

Figura 3.

partes

partes temporis et relatae ad diametrum lunae per moram tranſitus eius per filum horizontale expreſſam. Datur praeterea ex iisdem obſeruatis linea D E inter perpendiculares A D, B E intercepta, vt infra §. 23. fuſius monſtrabo; vnde quaeſtio huc redit, vt ex data punctorum A, B, poſitione reſpectu lineae D E, inueniatur centrum C et radius A C circuli, qui per iſta puncta A, B, transeat et lineam D E tangat. Solutio haec eſt. Sit L punctum, in quo vmbra tetigit lineam D E. Si iſtud punctum L per D L vel L E ſciretur, darentur tria puncta, per quae circulus A L B tranſit, vnde per elem. geom. circulus poſitione et magnitudine daretur. Quaerenda igitur eſt D L. Iungantur A L, BL; et quia D E tangit circulum A L B in L per hyp. erit per 32 III. Elem: A B L $=$ D L A, L A B $=$ B L E. Iungatur L C; erit per 20. III. Elem:, A B L $= \frac{1}{2}$ A C L, L A B $= \frac{1}{2}$ L C B. Ductis iam ex C perpendiculis C F, C G ad A L, L B, reſpectiue, erit A C F $= \frac{1}{2}$ A C L, et B C G $= \frac{1}{2}$ L C B, Hinc A C F ($= \frac{1}{2}$ ACL $=$ ABL) $=$ DLA, BCG ($= \frac{1}{2}$ LCB $=$ LAB) $=$ BLE; vnde cum ad F et D, G et E ſint recti; erunt triagula DLA, ACF; BLE, BCG, ſimilia, et AD: AL $=$ AF: AC, BE: BL $=$ BG: BC. Vocatis iam AD $= a$, BE $= b$, DE $= c$, DL $= x$, AC $=$ LC $=$ BC $= y$; fit LE $= c - x$, AL $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$, AF $= \frac{1}{2}$ AL $= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + x^2)}$, BL $= \sqrt{(b^2 + (c-x)^2)}$, BG $= \frac{1}{2}$ BL $= \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 + (c-x)^2)}$. Prima analogia ſuppeditat $y = \frac{a^2 + x^2}{2a}$, ſecunda $y = \frac{b^2 + (c-x)^2}{2b}$; facta aequationum reductione poſitaque $m = \frac{ac}{a-b}$, prodit $x = m \pm \sqrt{(m^2 - mc + ab)}$. Inuenta x, dabitur et $y = \frac{a^2 + x^2}{2a}$ radius circuli, qui quaeritur.

 §. 16.

§. 16. Subſtitutis numeris ex obſeruationibus phaſium iuxta praecepta §. 15. inſtitutis, quas hic recenſere ſuperſedeo, deprehendi ſemidiametrum vmbrae ſummúm ad 37. minuta prima circuli maximi aſcendere, ex phaſibus diuerſis diuerſa ſemidiametri vmbrae quantitate reſultante. Reductio haec ſemidiametri vmbrae §. 15. inuentae ad partes circuli maximi inſtituitur ope diametri lunae horizontalis, quae in iisdem partibus dari debet, et ope rationis ſemidiametri lunae ad radium vmbrae ex §. 15. nota. Sic ex obſeruationibus nihil certi de magnitudine ſemidiametri vmbrae ſtatuere licet. Calculus ex Tab. Aſtron. iſtam 3. minutis primis et vltra maiorem prodit. Sed exactiorem quoque iſtius determinationem ex obſeruatione praeſentis Eclipſis non expectaui, vbi terminus vmbrae incertus omnes conatus dubios reddidit.

§. 17. Aliunde igitur petenda erat ſemidiameter vmbrae, vt phaſium determinationem inſtituere poſſem. Cum ſemidiameter vmbrae aequalis ſit differentiae inter parallaxin lunae horizontalem et ſemidiametrum Solis apparentem, neglecta parallaxi Solis horizontali; parallaxis autem horizontalis lunae cum diametro eius horizontali arctè connexa ſit; diametros ſolis et lunae per obſeruationem acquiſitas, quippe ad quas in obſeruatione Eclipſium ſemper attendi ſolet ac debet, contemplatus ſum, vt exinde ad ſemidiametrum vmbrae argumentari poſſem.

§. 18. Mora tranſitus diſci Solis per Meridianum die 8. Septembr. ex obſeruatione mea deprehenſa fuit 2′. 8$\frac{3}{4}$″; facta reductione partium temporis ad partes diurni et inde ad partes circuli maximi, prodit diameter Solis 32′. 0″, praeciſe

praeciſe vt in Tabulis Ludouicianis extat. Diameter lunae duplici modo ex obſeruatione habetur. Primo per micrometrum a Cl. *de L' Isle* menſurata paulo poſt culminationem lunae in altitudine eius circiter 22°, deprehenditur 30′. 17″. cui reſpondet diameter lunae horizontalis 30′. 6″. Deinde ex mora tranſitus diſci lunaris per meridianum = 2′. 4½″, ſubtractis 4″, quae motui lunae proprio in diurno ad plagas contrarias iis, ad quas luna fertur motu communi, directo, interea temporis, quo diſcus lunae meridianum traiecit, debentur; cognoſcitur diameter lunae ſeu potius mora tranſitus eius motu proprio priuatae per meridianum = 2′. 0½″, cui in partibus diurni reſpondent 30′. 15″, in partibus vero circuli maximi 29′. 59″, facta ſcilicet reductione, ope declinationis lunae viſae 7°. 44′. ex altitudine centri lunae meridiana acquiſitae; vnde diameter lunae horizontalis prodit 29′. 48″, qua ab eadem per Micrometrum determinata differt 18″ in defectu. Si media ſumatur inter vtramque, euincitur diameter lunae horizontalis 29′. 57″. quam pro vera diametro eo libentius habeo, quo certior ſum, in mora tranſitus diſci lunaris per meridianum ¼ vnius ſecundi temporis in defectu vix peccatum fuiſſe. Tabulae Ludouicianae in Eclipſi diametrum lunae horizontalem 30′. 1″. aſſignant, parum proinde ab iſta diuerſam, quam obſeruatio culminationis lunae 4 horas et vltra ante Eclipſin exhibuit. Conſentientibus ſic calculo et obſeruatione circa diametrum Solis lunaeque diametrum horizontalem, quantitates parallaxeos lunae horizontalis pariter ac ſemidiametri vmbrae ope Tabularum earundem ſtatuere non dubito, ac ſi ex obſeruatione ipſa habeantur. Sumam ergo ex Tabulis Ludouicianis ſemidiame-

trum vmbrae deductum 40′ 33″; diametrum vero lunae horizontalem adhibebo 30′. 0″.

§. 19. His iam determinatis de conſtructione phaſium §. §. 5. 10. nihil amplius monere reſtat, quam quod in applicatione ſemidiametri vmbrae ad conſtructionem phaſeos, magnitudo eius reducatur ad partes eas, quibus diſcus lunae in ſchemate expreſſus eſt, v. c. in caſu §. 5. inferendo vt 30′. 0″ ad moram tranſitus lunae, per filum horizontale ita 40′. 33″. ad quaeſitam ſemidiametri vmbrae magnitudinem; vel in caſu §. 10. inferendo, vt 30′. 0″ ad moram tranſitus lunae per horarium, ita 40′. 33″ ad quaeſitum vmbrae ſemidiametrum.

§. 20. Iuuat nunc exponere methodum, qua per calculum in earundem phaſium quantitates inquiſiui, vt de illis non ſolum vtroque modo, et per conſtructionem et per calculum certior ſim, ſed viam quoque ſternam, ope datorum quorundam calculo prius eliciendorum perueniendi ad reliquas deductiones ex obſeruatione praeſentis Eclipſis inſtituendas.

Figura 2. §. 21. Poſitis iisdem in fig. 2. quae ſupra §. 7. ſeqq. poſuimus, inueſtigemus ope calculi quantitatem phaſeos AxB, hoc eſt rationem $Qx : Qq$. Hunc in finem per cornua A, B, ductae intelligantur chordae A G, B T ad H S parallelae, ad quas perpendicularis ſit lunae diameter S D R ad lineam verticalem V P parallela, biſecans chordas reſpectiue in E, L; ſecans autem rectam A B cornua iungentem in M. Diameter lunae S R exprimatur per partes temporis morae tranſitus eius per filum

filum horizontale, quae per §. 9. datur. Licet enim ſupra § 7. in conſtructione ſchematis (fig. 2) diameter lunae expreſſa fuerit per moram tranſitus eius per horarium, exinde tamen nullus error timendus, cum lineae ſchemati inſcriptae eandem ad diametrum S R rationem retinent, per quaſcunque partes diameter iſta exprimatur. Diametrum lunae per moram tranſitus eius per filum horizontale hanc ob cauſam requiro, vt linearum S E, S L ratio ad diametrum immediate ex obſeruatione habeatur. S E ſcilicet datur per interuallum temporis inter appulſus limbi lunae S et cornu praecedentis A ad filum horizontale; S L vero per interuallum temporis inter appulſus limbi lunae S et cornu ſequentis B ad idem filum. Datis hiſce habentur $EL = SL - SE$, $ER = SR - SE$, $LR = SR - SL$, $AE = \sqrt{(SE \times ER)}$, $LB = \sqrt{(SL \times LR)}$. Iam ex ſimilitudine triangulorum AEM, BLM, fit $AE + BL : AE = EL : EM$; vnde EM datur et proinde $AM = \sqrt{(AE^2 + EM^2)}$. Porro datur $ML = EL - EM$ et $BM = \sqrt{(BL^2 + ML^2)}$, quare tandem habetur $AB = AM + BM$, et $AF = \frac{1}{2} AB$. Requiritur nunc ſemidiameter vmbrae AZ vel Zx, quae quidem per methodum §. 15. ſtatim in iſta menſura datur, qua in praeſenti negotio diameter lunae et omnes reliquae lineae exhibentur; ſed cum per §. 18 ſumta fuerit vmbrae ſemidiameter ex Tab. aſtron. per partes circuli maximi expreſſa, haec iuxta §. 19. reducta intelligi debet ad partes eius menſurae, qua in praeſenti calculo vtimur. Datis ſic AZ, AF, in triangulo AFZ ad F rectangulo dabitur $FZ = \sqrt{(AZ^2 - AF^2)}$ et $Fx = Zx$ (vel AZ) $- FZ$. Ex praecedentibus iam dantur LB, MB, EM,

nec

nec non $DE = SE - SD$ (ſemidiam. lunae); vnde dabitur $DM = DE + EM$. Ex ſimilitudine vero triangulorum MLB, MDF, inferendo $MB : BL = DM : DF$ dabitur DF et $Dx = DF - Fx$, tandemque $Qx = DQ - Dx$, quantitas phaſeos, quae quaeritur, expreſſa per partes easdem, quibus diameter lunae hactenus expoſita fuit; vnde inferendo, vt mora tranſitus diſci lunaris per filum horizontale, ad quantitatem phaſeos inuentam, ita 12 digiti Ecliptici ad quartum proportionalem, acquiritur quantitas phaſeos in digitis eclipticis, eorumque ſubdiuiſionibus.

§. 22. Hac methodo determinaui quantitates phaſium ſecundae et quartae; circa phaſes autem primam et tertiam, vtpote dubias, ſimplici conſtructione contentus fui. Phaſium quantitates ipſas in digitis eclipticis expreſſas ſupra in recenſione obſeruationis expoſui.

Figura 3. §. 23. Per computum hactenus traditum peruenitur etiam ad quantitatem lineae DE (fig. 3,) quam §. 15 datam ſuppoſui. Per A cornu praecedens (fig: 3) ducta ſit Ab parallela ad DE, quae inter parallelas AD, BE contenta aequalis erit ipſi DE; Bb autem reſpondebit interuallo temporis inter appulſus cornuum ad filum horizontale, quod DE repraeſentat, et eadem eſt cum recta EL (fig: 2). Hinc in triangulo ABb ad b rectangulo datur Bb, et AB diſtantia cornuum §. 21. vnde dabitur $Ab = DE = \sqrt{(AB^2 - Bb^2)}$.

§. 24. Phaſium determinationem prolixe hactenus expoſitam ad vſum tandem traducamus. Vſus iſte verſatur

ſatur circa determinationem temporis initii, finis Eclipſis, obſcurationis maximae, oppoſitionis ſolis et lunae; horarii lunae a ſole, latitudinis lunae in oppoſitione, diſtantiae centrorum minimae, quantitatis eclipſis, inclinationis orbitae lunae viſae et verae ad circulum latitudinis vel Eclipticam, diſtantiae lunae a nodo, loci lunae in oppoſitione, et quae ſunt huius generis alia. Finis eſt ope phaſium ad haſce deductiones perueniendi, adhibitis ſcilicet centrorum lunae et vmbrae diſtantiis ex quantitate phaſis cuiuslibet petendis. Diſtantia centrorum lunae et vmbrae DZ aequalis eſt ſummae ſemidiametrorum vmbrae Zx et lunae DQ, demta quantitate phaſeos Qx. Datis itaque ſemidiametris vmbrae et lunae, et quantitate phaſeos, datur diſtantia centrorum lunae et vmbrae. Figura 2.

§. 25. His praemiſſis, ſit fig: 4 ſchema eclipſis praeſentis ſitu inuerſo, vt cum deſignatis ex obſeruatione phaſibus eó melius conferri poſſit, repraeſentatum. GQK referat vmbram terrae, C centrum eius, CN latitudinem lunae meridionalem in ☍ ſolis et lunae, NI orbitam lunae viſam, CH perpendicularis ad NI diſtantiam centrorum minimam. Lunae centro ab I verſus N moto diſcus lunae ſucceſſiue immergatur vmbrae terreſtri, easque phaſes ſubeat, quas ex obſeruatione acquiſiuimus. Ponamus centrum lunae fuiſſe in A tempore phaſeos primae obſeruatae, in B tempore ſecundae, in D momento tertiae. Iunctis AC, BC, DC, erit AC diſtantia centrorum lunae et vmbrae in prima phaſi, BC in ſecunda, DC in tertia; quae diſtantiae vi §. 24. dantur. A prima phaſi vsque ad ſecundam centrum lunae ſpatium AB, Figura 4.

 a ſecunda

a ſecunda vsque ad tertiam phaſin ſpatium BD peragrauit; vnde cum motus lunae durante Eclipſi vniformis ſupponi poſſit, dabitur ratio linearum AB, BD, eadem cum ratione interuallorum temporis inter phaſin primam et ſecundam, ſecundam et tertiam.

§. 26. Opera igitur danda eſt, vt ex AC, BC, DC magnitudine datis et ratione AB : BD inueniantur, CH diſtantia centrorum minima, ſeu altitudo communis triangulorum ACB, BCD; DH diſtantia centri lunae a tertia phaſi vsque ad obſcurationem maximam; et reliqua §. 14. memorata, quae inde pendent. Centro C radiis

Figura 5. CD, CB, deſcriptis circulis concentricis DEL, BFM, problema huc redit: *Datis per radios DC, BC, duobus circulis concentricis DEL, BFM, ex puncto A extra iſtos per diſtantiam CA dato, ducere ſecantem ABD, ſic vt portiones eius, AB, AD, ſint in data ratione.*

Solutio. Ex A ad circulos BFM, DEL ductae ſint tangentes AM, AL, et ad iſtas ex centro C normales CM, CL; et manifeſtum eſt dari $AM = \sqrt{(AC^2 - CM^2)} = \sqrt{(AC^2 - BC^2)}$, et $AL = \sqrt{(AC^2 - CL^2)} = \sqrt{(AC^2 - DC^2)}$. Producta AD ſecet circulos ex altera parte in d, b; ſitque ad AD productam ex centro C perpendicularis CH, quae chordas Bb, Dd biſecet in H, vt ſit $Bb = 2BH$, $Dd = 2DH$. Ponatur iam $AL = g$, $AM = f$, $AB : BD = m : n$, $AB = x$, $BH = y$; eritque $AD : AB = m + n : m$, $AD = \frac{(m+n)x}{m}$, $BD = \frac{nx}{m}$ $DH = y - \frac{nx}{m}$. Per 36. III. Elem: eſt $AM^2 = AB \times Ab = AB \times (AB + 2BH)$, $AL^2 = AD \times Ad = AD \times (AD + 2DH)$.

2 DH). Subſtitutis expreſſionibus algebraicis ex aequatione prima fit $f^2 = (x + 2y) \times x$, è ſecunda $g^2 = (\frac{(m+n) \times x}{m} + 2y - \frac{2nx}{m}) \times \frac{(m+n) \times x}{m}$; factaque aequationum reductione fit $x = \sqrt{(\frac{m}{n}(f^2 - \frac{m}{m+n} g^2))}$. Inuentâ vero x, habetur $y = \frac{f^2 - x^2}{2x}$.

§. 27. Datis AC, BC, DC, diſtantiis in partibus circuli maximi, prouti per §. §. 18. 24. facillime inueniri poſſunt; in iisdem quoque dabitur recta AB; et cum habeatur interuallum temporis inter phaſin primam in A, et ſecundam in B, inferendo, vt hoc interuallum temporis ad vnam horam, ita AB inuenta ad quartum, dabitur *horarius lunae in orbita viſa*. Ope iſtius horarii ſi inuenta BH conuertatur in tempus, idque momento temporis phaſeos 2^{dae} in B addatur, inuenitur *momentum obſcurationis maximae*, centro lunae in H verſante. Ex datis BH, BC in partibus circuli maximi, datur in iisdem *diſtantia centrorum minima* $CH = \sqrt{(BC^2 - BH^2)}$ et proinde pars diametri lunae obſcurata in obſcuratione maxima aequalis ſummae ſemidiametrorum lunae et vmbrae demta centrorum diſtantia minima; quae pars ſi ope diametri lunae ad digitos eclipticos reducatur, *quantitas Eclipſis* in iisdem habetur. In initio et fine Eclipſis diſtantia centrorum lunae et vmbrae aequalis eſt ſummae ſemidiametrorum vmbrae et lunae = IC, ſi v. g. in I centrum lunae in initio Eclipſis ponatur; vnde in triangulo ICH ad H rectangulo ex datis IC, CH, inuenitur $IH = \sqrt{(IC^2 - CH^2)}$, quae ope horarii lunae in orbita viſa ad partes temporis reducta manifeſtat interuallum temporis inter obſcurationem maximam et initium vel finem eclipſeos; quod ſi ſubducendo

Figura 4.

vel addendo applicetur momento obſcurationis maximae, acquiritur *tempus initii* vel *finis eclipſis.*

§. 28. Methodum hanc ſubſtitutis ex obſeruatione numeris perſequi quidem tentaui, ſed ſucceſſu minus felici. Diſtantiae centrorum, quae requiruntur, omnes non admodum certae ſunt, et quod maximum interualla temporum, quae rationem AB:BD determinant, tam exigua, vt, ſi minimus error vel in diſtantiis AC, BC, DC, vel ratione AB:BD commiſſus fuerit, iſte in determinatione poſitionis rectae AD productae admodum notabilis euadat. Miſſo igitur hoc negotio, rem aliter tentaui, aſſumto ex Tab. aſtron. motu horario lunae in orbita viſa. Cum enim de diſtantiis centrorum lunae et vmbrae in phaſi 2. et 4. certior eſſem, poſito centro lunae in A momento phaſeos 2, in D tempore phaſeos 4, interuallum temporis inter phaſin 2. et 4. quo luna ſpatium AD peragrauit, ope horarii lunae in orbita viſa reduxi ad partes circuli maximi, vt ſpatium AD in eadem menſura habeatur, in qua dantur AC, DC, diſtantiae centrorum in 2. et 4. phaſi. Hoc enim pacto trianguli ACD tria dantur latera, e quibus altitudo eius CH, diſtantia centrorum minima, quaeritur; reliqua vero vt ante §. 27. determinantur. Numeris ſubſtitutis negotium quidem melius, ac ante, ſucceſſit, ob latus AD tamen valde exiguum determinatio poſitionis ipſius AD produ-ctae adhuc notabiliter incerta permanſit, ſi vel diſtantiae AC, DC, vel latus AD paululum magnitudine variarentur. Vtraque methodus exactiorem promittit executionem, ſi ex obſeruatione habeantur diſtantiae centrorum vmbrae et lunae ante et poſt obſcurationem maximam; quales vero praeſens obſeruatio non ſuppeditat.

§. 29.

§. 29. Methodus adhuc alia ſupereſt recenſenda, quam pro praeſentis negotii conditione ſucceſſu ſatis felici ſum proſecutus. In ſingulis ſcilicet phaſibus v. g. centro lunae verſante in A, attendi non ſolum ad diſtantiam centrorum lunae et vmbrae AC, ſed ſimul quoque ad angulum ACG, quem diſtantia dicta efficit cum Ecliptica. Angulus iſte ex obſeruatione tum per conſtructionem tum per calculum phaſeos §. §. 11. 21. habetur. Datur enim poſitio centri vmbrae Z reſpectu diurni KD per centrum lunae D transeuntis. Ex Z ad diurnum KD ducta normalis ZN circulum declinationis centri vmbrae repraeſentat. Ex dato phaſeos obſeruatae tempore datur locus ſolis in Ecliptica, et proinde locus centri vmbrae ipſi oppoſitus, ex quo dato angulus Eclipticae cum meridiano ſeu circulo declinationis per Tab: aſtron. ſtatim cognoſcitur. Error ſenſibilis non euadit, ſi pro omnibus phaſibus adhibeatur angulus Eclipticae cum meridiano, qui loco centri vmbrae in oppoſitione ſolis et lunae reſpondet. Si igitur angulus NZO aequalis fiat inuento angulo Eclipticae cum circulo declinationis, habebitur etiam DZO angulus, quem linea centra lunae et vmbrae iungens cum Ecliptica format. Per calculum idem angulus DZO facile inuenitur. Ex §. 21. enim dantur DM, DF, DI, DP. Igitur in triangulo DMF inferendo DM: DF = Sinus totus : Sin. DMF, datur DMF = PDZ Et in triangulo PDI inferendo DI : DP = Sinus totus : Sin. PID, datur PID, eiusque complementum ad rectum PDI, vnde dabitur IDZ = PDI + PDZ, a quo ſi ſubtrahatur rectus, habetur DZN in triangulo DNZ ad N rectangulo; quare cum detur OZN angulus Eclipticae

Figura 4.

Figura 5.

Kkk 3 cum

cum circulo declinationis, habebitur etiam quaeſitus DZO = OZN − DZN. Notandum hic, tum quoad conſtructionem, tum quoad calculum, quod, cum NDK ſit diurnus apparens §. 7. angulo IDZ correctio aliqua applicari debeat petenda ex mutata interea lunae declinatione, dum centrum lunae ſpatium DI in diurno apparenti confecit.

Figura 4. §. 30. Sit iam in data phaſi centrum lunae in A, diſtantia centrorum lunae et vmbrae AC; et per §. 29. dabitur angulus ACG eiusque complementum ad rectum ACN. Sumto igitur ex Tab: aſtron. angulo ANC, Inclinationis orbitae viſae AN cum circulo latitudinis NC, in triangulo ACN, ex datis angulis ACN, ANC, et latere AC inueniuntur, CN *latitudo lunae in oppoſitione*, et AN diſtantia centri lunae in data phaſi a loco oppoſitionis, quae AN ſi ope horarii lunae in orbita viſa ex Tab: aſtron. ſumti conuertatur in tempus, idque tempori phaſeos in A addatur, *momentum oppoſitionis ſolis et lunae* prodit. Sit IC aequalis ſummae ſemidiametrorum lunae et vmbrae, eritque initio eclipſeos centrum lunae in I. Ex reſolutione trianguli INC, in quo latera NC, IC et angulus INC orbitae viſae cum circulo latitudinis dantur, innoteſcit IN, quae ſi ope horarii lunae in orbita viſa in tempus conuertatur, idque a tempore oppoſitionis in N ſubducatur, remanet *momentum initii eclipſis* in I.

§. 31. In eadem momenta per conſtructionem ſchematis inquiſiui. Lineam AC in data phaſi inclinaui verſus Eclipticam CG in angulo ACG per §. 29 dato. Facta AC = diſtantiae centrorum lunae et vmbrae in data

phaſi

phaſi §. 11. acquiſitae, per A ad CN duxi lineam AN inclinatam ad NC in angulo aequali inclinationi orbitae viſae ad circulum latitudinis ex Tab. aſtron. depromtae. Hoc facto innotuerunt NC *latitudo lunae in oppoſitione*, AN, AI, (ſi ſcilicet interuallo IC aequali ſummae ſemidiametrorum lunae et vmbrae, ex C recta NA producta interſecetur in I), e quibus AN, AI ope horarii lunae in orbita viſa inſtar ſcalae in 60. minuta temporis diuiſi, et momento temporis phaſis in A, facile eruuntur *momenta oppoſitionis et initii Eclipſis.*

§. 32. Factis vtroque modo circa phaſes 2, 3, 4, experimentis, deductiones quidem inter ſe diſſentientes deprehendi, quales plerumque ex eiuſmodi obſeruationum genere prodire ſolent, qualesque in praeſenti negotio expectaui. Interim tamen praeter ſpem in determinatione initii Eclipſis et latitudinis lunae in oppoſitione conſenſum ſufficientem deprehendi, diſcrepantia maxima circa initium non niſi ad 30. ſecunda temporis, circa latitudinem lunae in oppoſitione ad 20. ſecunda circuli maximi aſſurgente. Initium, e deductis medium, contigit $16^h. 9'. 25''$ tempore vero; latitudo lunae in oppoſitione, e deductis media, $40'. 40''$.

§. 33. Poſitis hiſce tanquam veris fundamenti loco, reliqua eclipſeos momenta deduxi, vt ſequuntur. Nimirum in triangulo ICN ex datis, IC = ſummae ſemidiametrorum lunae et vmbrae, NC latitudine lunae in oppoſitione, INC inclinatione orbitae viſae ad circulum latitudinis, inuentam IN ope horarii lunae in orbita viſa reduxi ad tempus, eoque ad tempus initii §. 32. poſitum addito, Figura 4.

innotuit

innotuit *tempus oppoſitionis.* Deinde in triangulo HNC, ad H rectangulo ex datis NC, HNC, eiusque complemento ad rectum HCN, inueſtigaui HC *diſtantiam centrorum minimam*, et inde iuxta §. 27. *quantitatem Eclipſis* in digitis eclipticis. Denique in eodem triangulo inuenta HN, eaque ad tempus reducta, innotuit differentia temporis inter obſcurationem maximam et oppoſitionem, adeoque et ipſum *tempus obſcurationis maximae.*

MOMENTA HVIVS CALCVLI
ſunt:

EX COMPARATIONE OBSERVATIONVM
iuxta §. 32.

Initium Eclipſis	$16^h. 9'. 25''.$
Latitudo lunae in ☋	$40'. 40''.$

Ex Tabulis Ludouicianis.

Inclinatio orbitae viſae lunae ad circulum latitudinis ſeu	INC =	$84°. 35'.$
Complementum eius	HCN =	$5°. 25'.$
Motus horarius lunae in orbita viſa	=	$28'. 13''.$
Semidiameter vmbrae	=	40. 33
Semidiameter lunae conſentiente obſeruatione	=	15. 0
Summa ſemidiametrorum lunae et vmbrae	=	55. 33.

Ex

Ex Deductionibus iuxta §. 33.

Tempus oppoſitionis Solis et Lunae.	17^h. 38′. 25″.
Tempus obſcurationis maximae	17. 30. 15
Diſtantia centrorum minima.	40′. 29″.
Quantitas Eclipſis	5. dig. 59′.

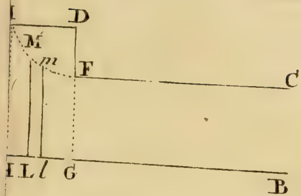
§. 34. Si initium ex obſeruationibus deductum §. 32. conferatur cum n. 4 obſeruationis Eclipſis noſtrae, patet, momentum temporis, quo limbi lunaris diſparitio per Tubum Newtonianum obſeruata fuit, apprime conſentire cum tempore initii deducti. Tempus autem initii pariter ac oppoſitionis Solis et Lunae ex obſeruationibus deductum, facta eius comparatione cum calculis pro praeſenti eclipſi inſtitutis, deprehenditur ſemper anteuertere id, quod ex calculo elicitum fuit. Sequens tabula manifeſtat diſcrepantiam momentorum ex obſeruatione praeſenti et calculis diuerſis deductorum.

	Initium	*Tempus obſcur: maxim:*	*Tempus* ☍	*Latitudo* ☽ *in* ☍
Ex obſeruatione	16^h.9′.25″	17^h.30′.15″	17^h.38′.25″	40′.40″
Ex calculo Cl. Winsheimii	16. 21. 0	— — —	17. 47. 37.	41. 1
Ex Elem: P. Grammatici	16^h. 15. 0	— — —	17. 42. 0	40. 49.
Ex Ephem: Manfredi	16^h. 13 0	17. 32. 0	— — —	— —
Ex Ephemer: Ghisleri	16. 33. 0	17. 49. 0	— — —	— —

§. 35. Calculus Cl. Winsheimii iuxta Tabulas Ludouicianas inſtitutus eſt, adhibitis omnibus, quae in recentioribus Tabularum Ludouicianarum editionibus annotatae fuerunt, correctionibus. Idem calculus, elementa, quae requirebantur, in deductionibus meis ſuppeditauit. Ex Elementis à P. Grammatici in diſſ. de Solis et Lunae Eclipſibus, computatis, prouti iſta ad Meridianum Vraniburgenſem Roſtius in Aſtronomo ſincero ſuo reduxit, conſtructione ſchematis initium deduxi. Meridianorum autem differentiam pro inſtituendis temporum reductionibus ſtatui, Pariſienſis et Petroburgenſis $1^h. 52'$. Vraniburgenſis et Petropolitani $1^h. 10'$. Bononienſis et Petropolitani $1^h. 16'$.

Emendanda.

Pag. 10. l. 5. §. 1. BC lege GC. pag. 30. l. 5. a fin. R T lege R V. pag. 72. l. 1. in margine lege Fig. 5. pag. 149. l. 6. aequalis lege *aequale*. ead. pag. l. 8. AC. AD. lege AC. BD. pag. 209. §. 4. trilineam lege *trilineum*. ead. pag. l. 12. *bcOa* lege *cbOa*. ead. pag. §. 5. l. 4. *ad*=*ab*=*b* lege *ad* =*db*=*b*. ead. pag. et eod. §. l. 5. AD=AB =B lege AD=DB=B. pag. 218. l. 9. *ed* lege *cd*. ead. pag. l. 10. *mfa*B lege *mf*AB. pag. 282. l. 6. ponatur in margine Fig. 11. pag. 375. l. 21. Verucho l. *Vkrucho*. p. 376. l. 23. con l. *contra*. ib. in not. Arriauus l. *Arrianus*. p. 377. Veruchi l. *Vkruchi*. p. 380. l. 19. ἔνθοδεν l. ἔνδοθεν. pag. 383. l. 24. αὐλῶ νκραλυμένην l. αὐλῶν κραλυμένην. p. 408. l. 5. N. P. l. M. P. p. 409. in notis Zoraram lege *Zonaram*.



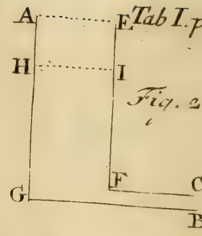
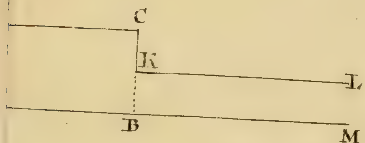


Fig. 2.



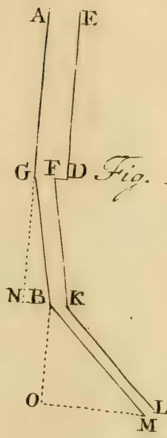
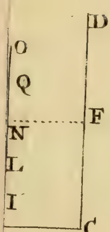


Fig. 4.



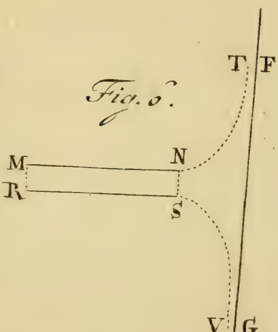


Fig. 6.

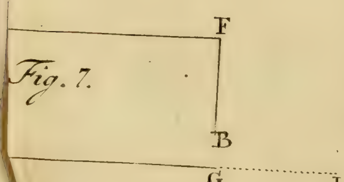
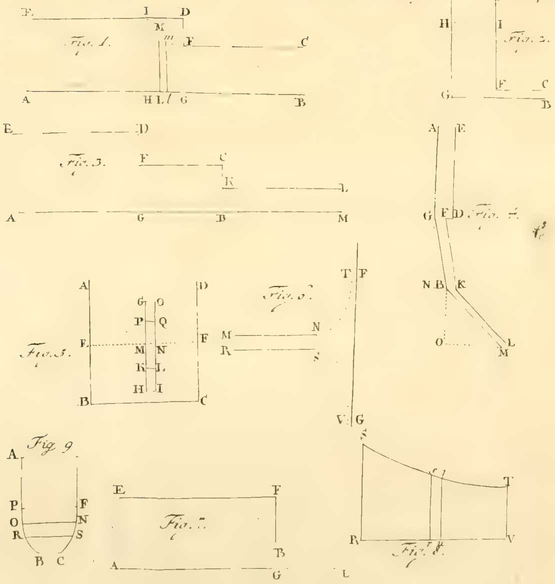
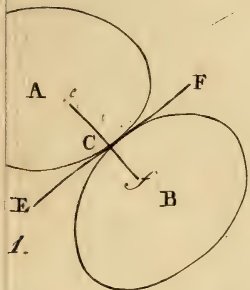


Fig. 7.



Fig. 8.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9



1.

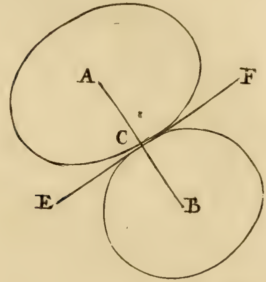


Fig. 2.

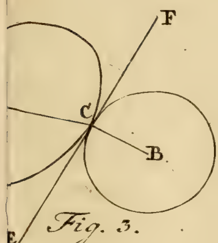


Fig. 3.

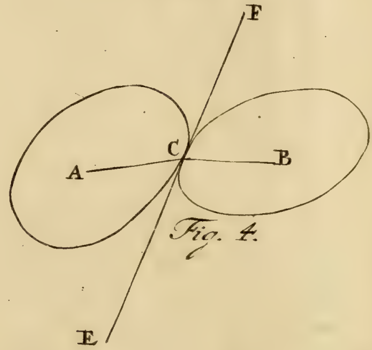


Fig. 4.

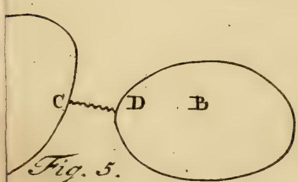


Fig. 5.

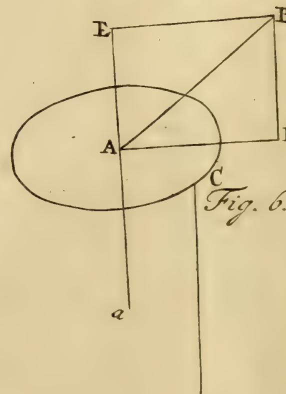


Fig. 6.

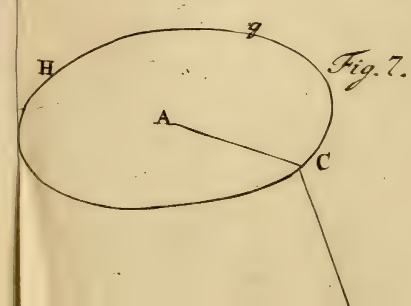


Fig. 7.

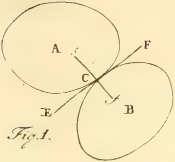


Fig. 1.

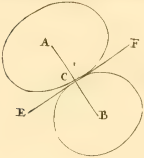


Fig. 2.

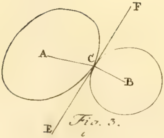


Fig. 3.

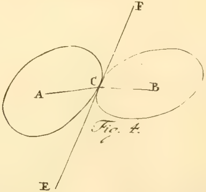


Fig. 4.

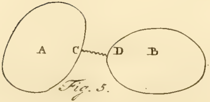


Fig. 5.

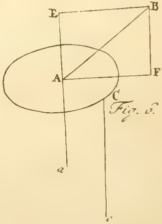


Fig. 6.

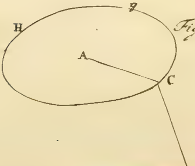
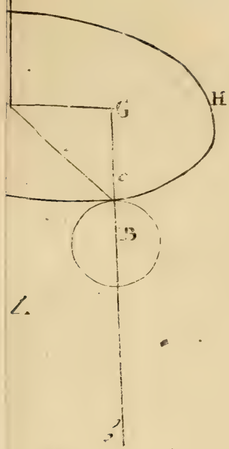


Fig. 7.



1.

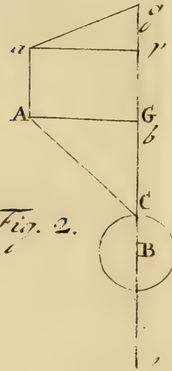
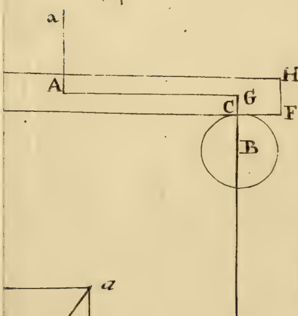


Fig. 2.



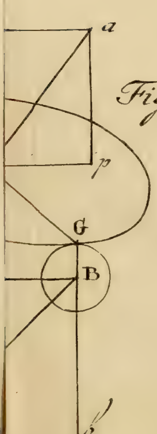
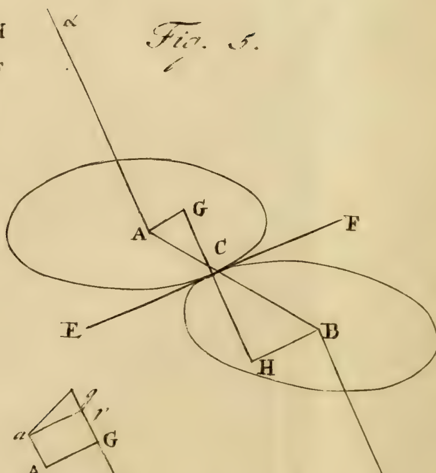


Fig. 4.

Fig. 5.



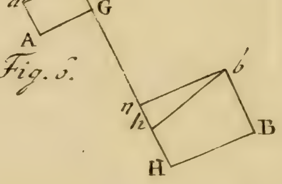


Fig. 6.

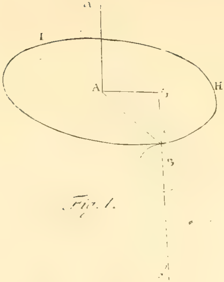


Fig. 1.

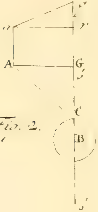


Fig. 2.

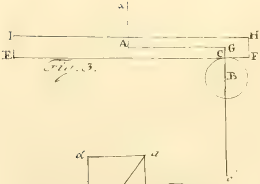


Fig. 3.

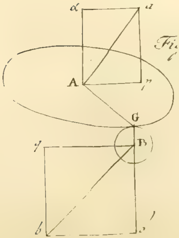


Fig. 4.

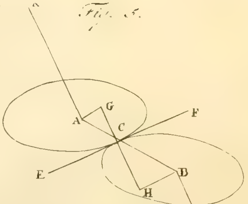


Fig. 5.

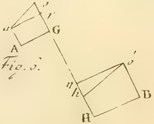


Fig. 6.

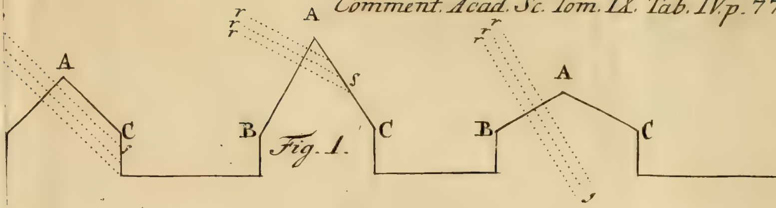


Fig. 1.

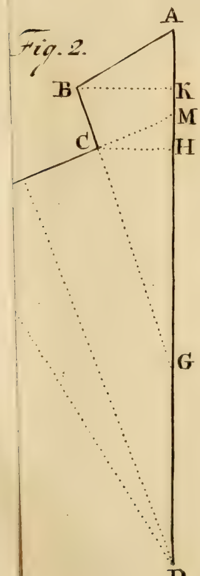


Fig. 2.

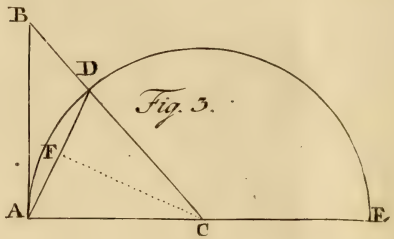


Fig. 3.

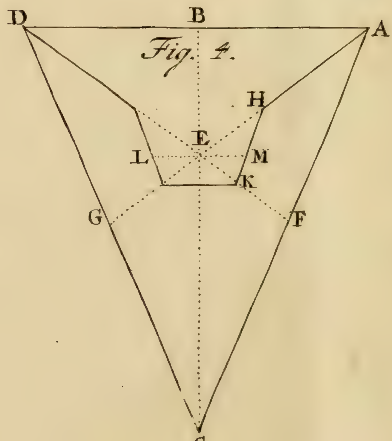


Fig. 4.

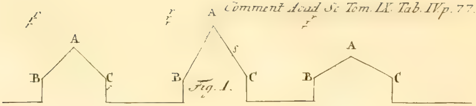


Fig. 1.

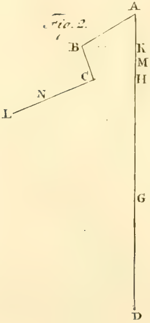


Fig. 2.

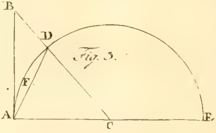


Fig. 3.

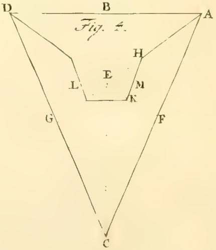
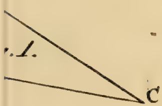
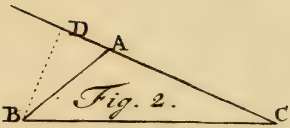
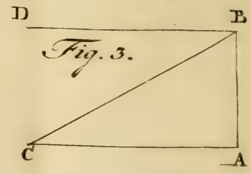
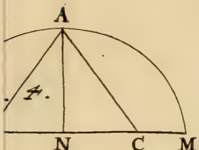


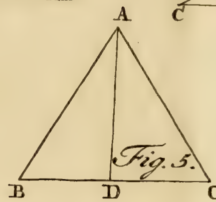
Fig. 4.

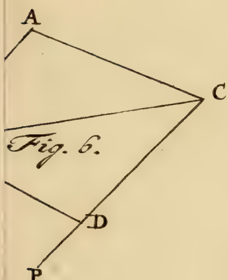

.1.
C

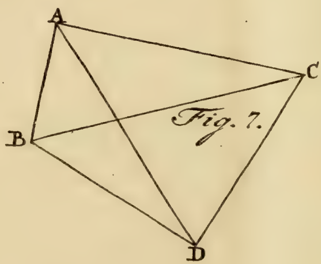

D
A
Fig. 2.
B
C

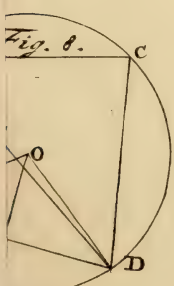

D
B
Fig. 3.
C
A

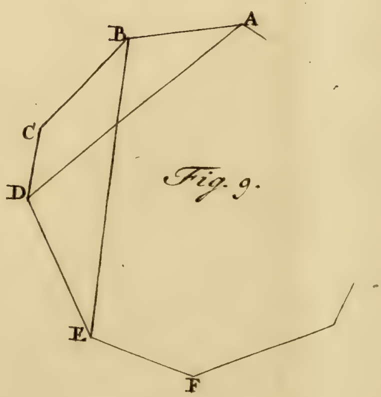

A
4.
N
C
M

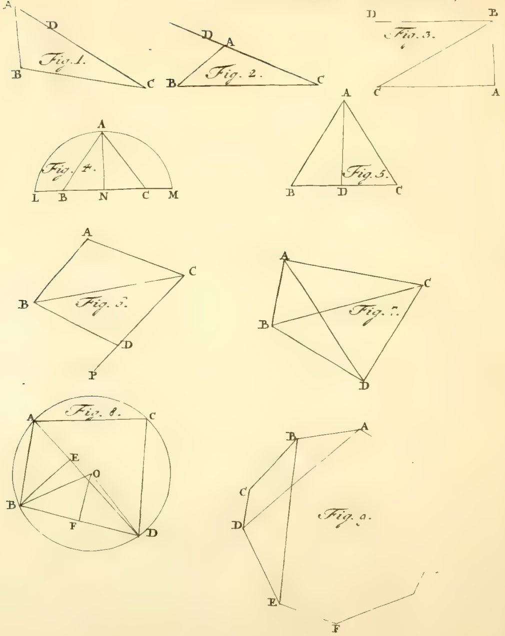

A
Fig. 5.
B
D
C


A
C
Fig. 6.
D
P


A
C
Fig. 7.
B
D


Fig. 8.
C
O
D


B
A
C
Fig. 9.
D
E
F


Fig. 1.
A
D
B
C
Fig. 2.
D
A
B
C
Fig. 3.
D
B
C
A
Fig. 4.
A
L
B
N
C
M
Fig. 5.
A
B
D
C
Fig. 6.
A
C
B
D
P
Fig. 7.
A
C
B
D
Fig. 8.
A
C
E
O
B
F
D
Fig. 9.
B
A
C
D
E
F

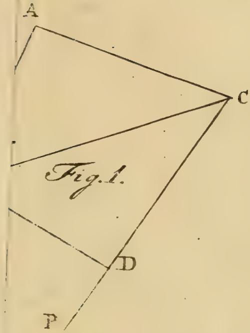


Fig. 1.

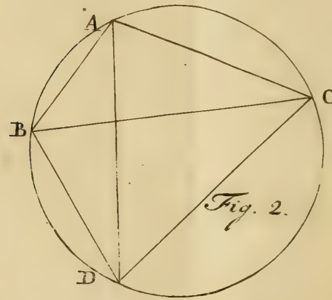


Fig. 2.

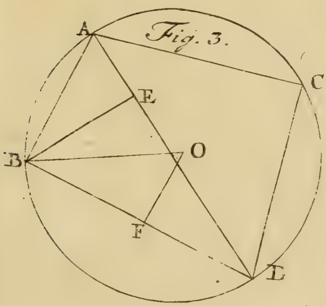


Fig. 3.

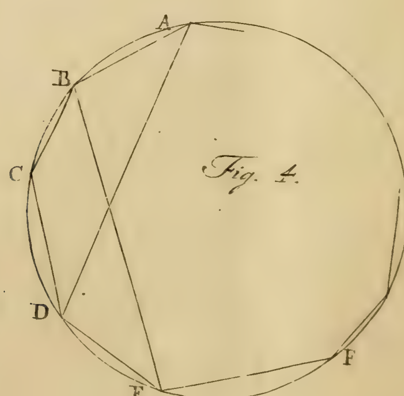
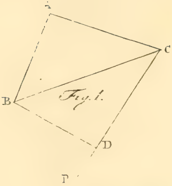
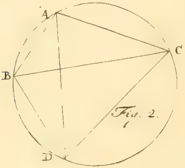
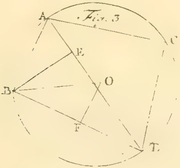
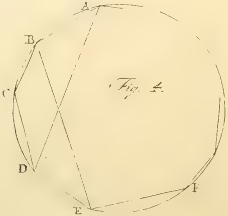


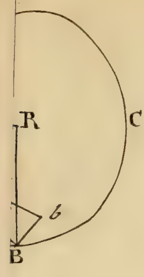
Fig. 4.


A
C
B
Fig. 1.
D
P


A
C
B
Fig. 2.
D


A
Fig. 3
C
E
O
B
F
D


A
B
Fig. 4.
C
D
F
E



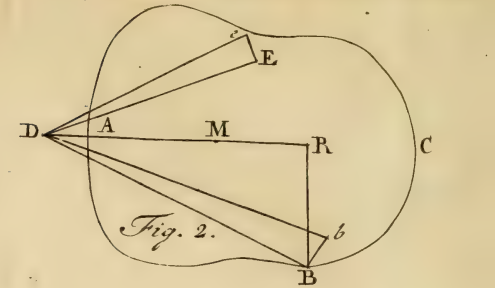
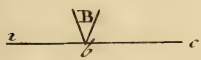


Fig. 2.



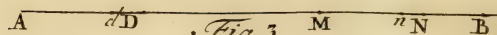


Fig. 3.

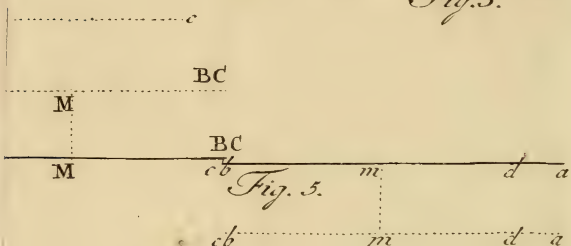
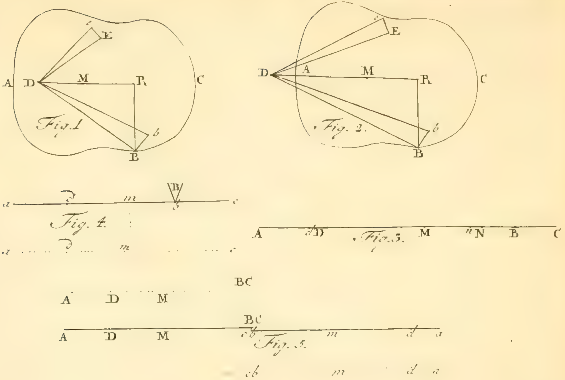
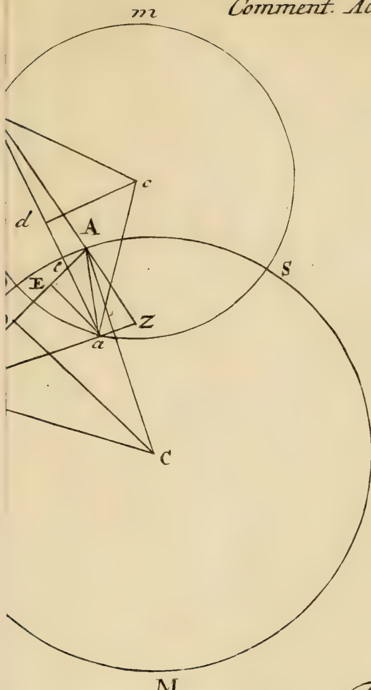


Fig. 5.


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
A
B
C
D
E
M
R
N
b
c
d
e
m
a
BC



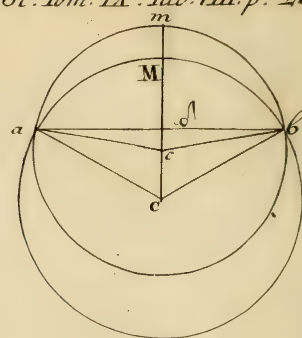


Fig. 2.

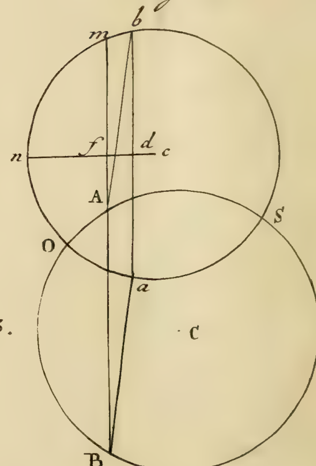


Fig. 3.

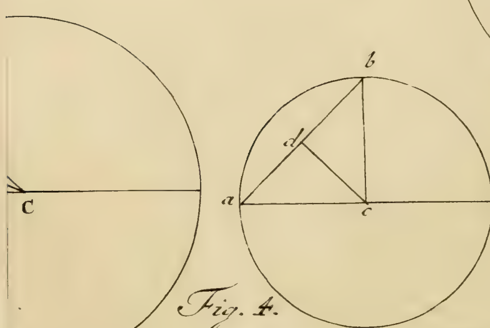


Fig. 4.

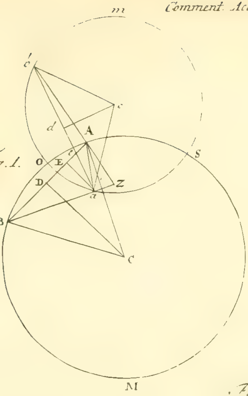


Fig. 1.

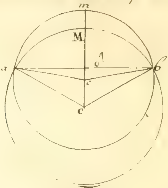


Fig. 2.

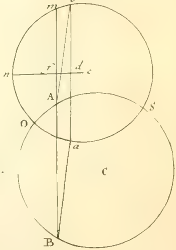


Fig. 3.

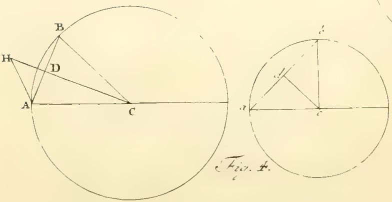
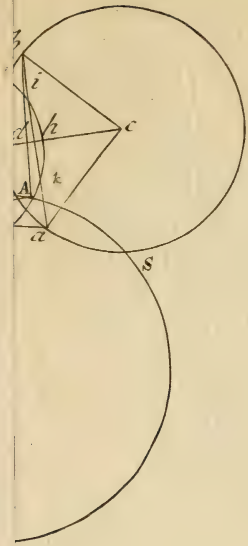


Fig. 4.



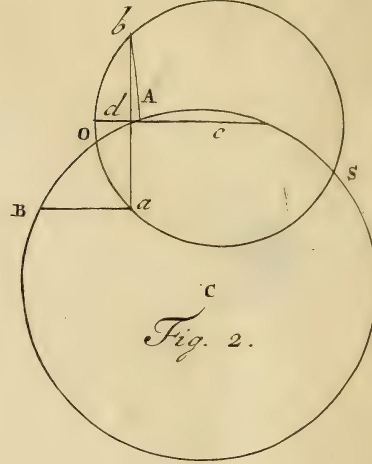
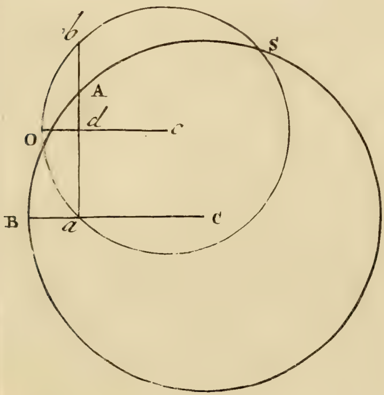


Fig. 2.



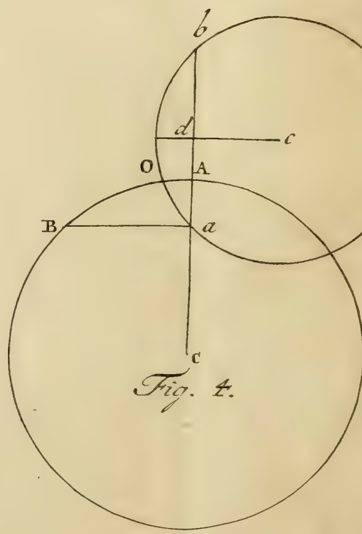
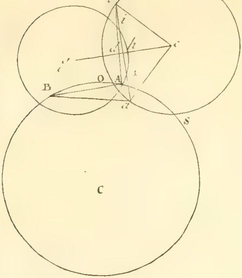


Fig. 4.

Fig. 1.



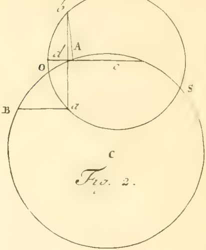


Fig. 2.

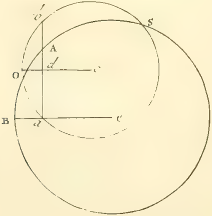


Fig. 3.

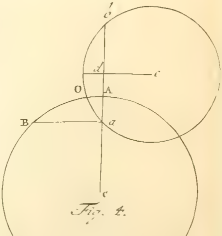


Fig. 4.

Fig. 2.

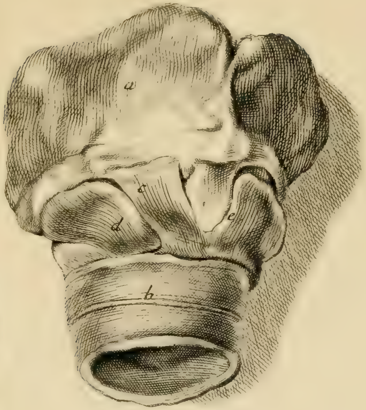


Fig. 3

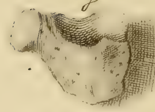


Fig. 4.

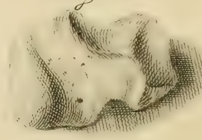


Fig. 5.





Fig. 1.

Fig. 2.


Fig. 3

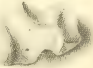
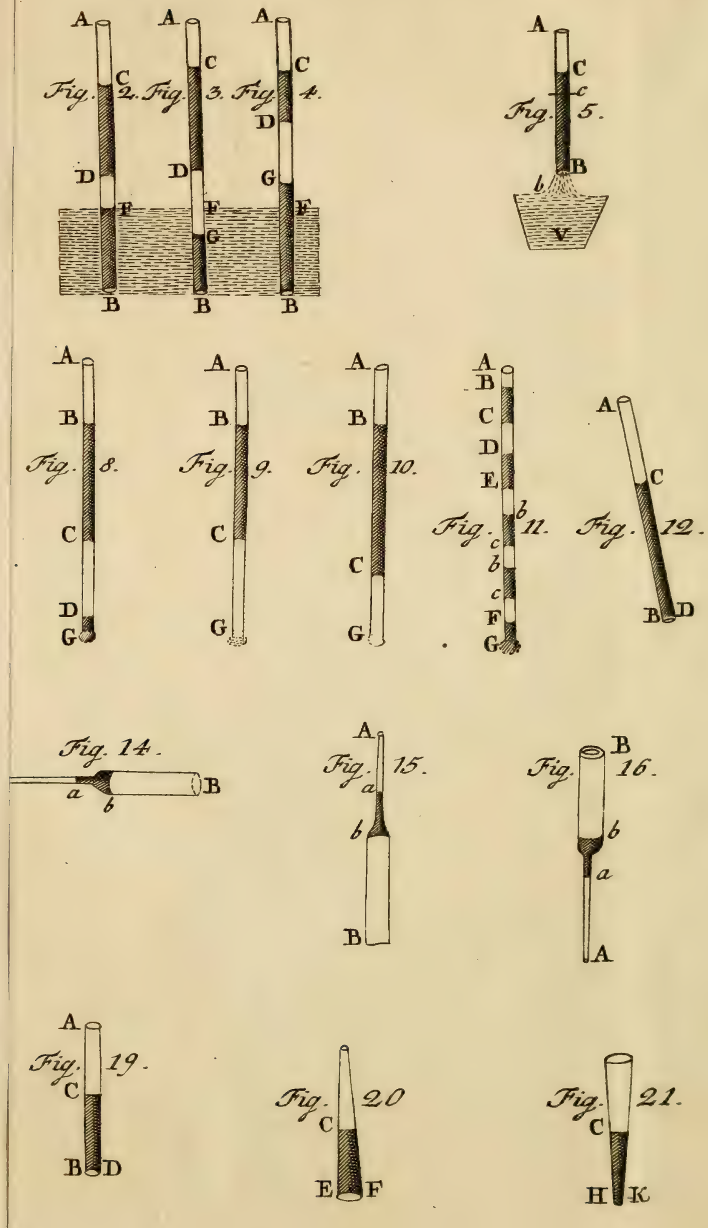

Fig. 4


Fig. 5



Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 19.
Fig. 20
Fig. 21.
A
B
C
D
E
F
G
H
K
V
a
b
c

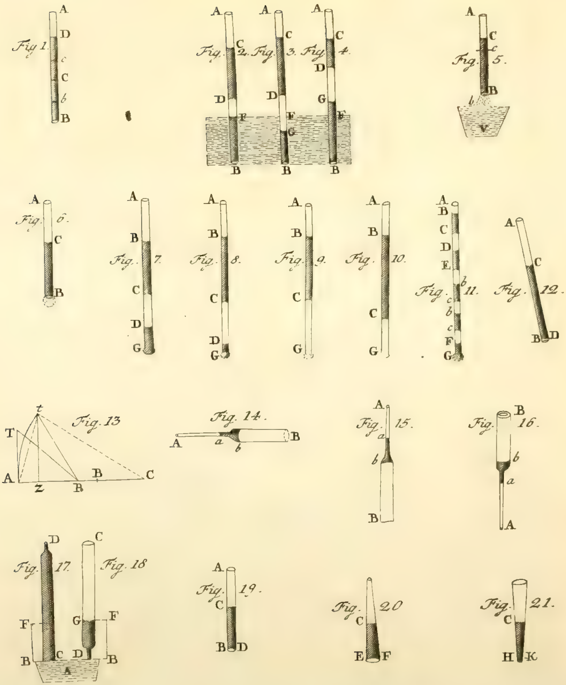
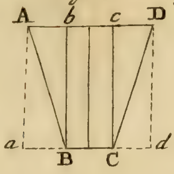

Fig 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18
Fig. 19.
Fig. 20
Fig. 21.

Fig. 24.



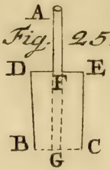


Fig. 25.



Fig. 26.

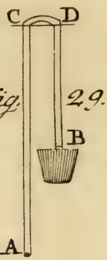


Fig. 29.

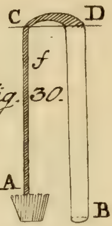


Fig. 30.

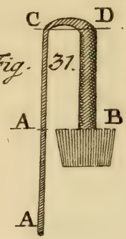


Fig. 31.

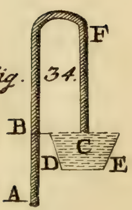


Fig. 34.

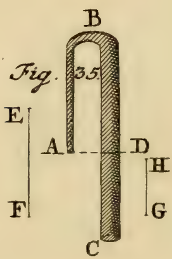


Fig. 35.

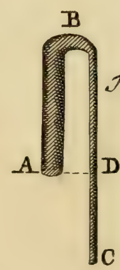
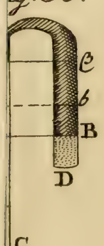


Fig. 36.

Fig. 38.



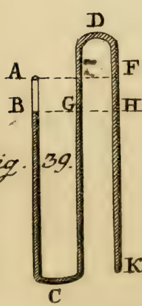


Fig. 39.

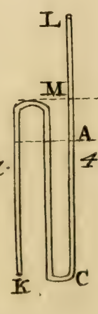


Fig. 40

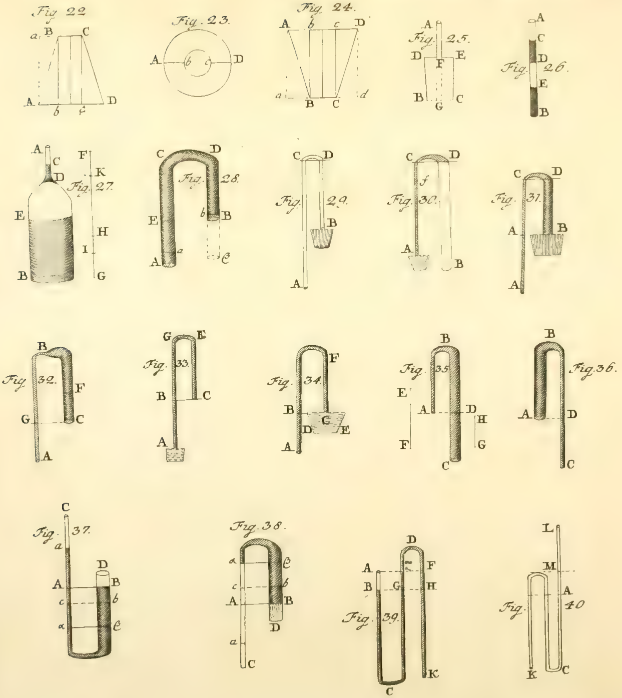

Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3

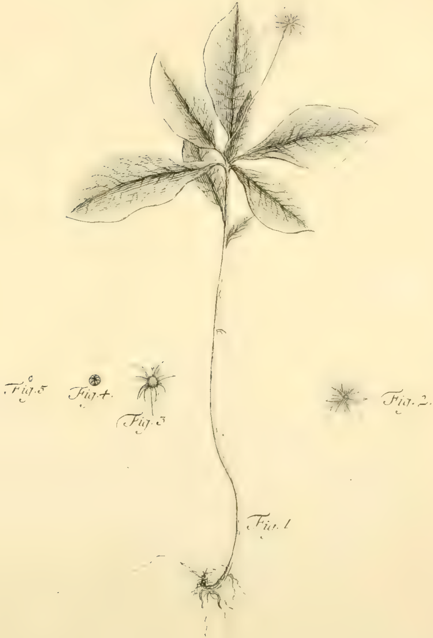

Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5



Fig. 3.



Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.





Fig. 1.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.

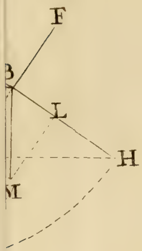


Fig. 2.

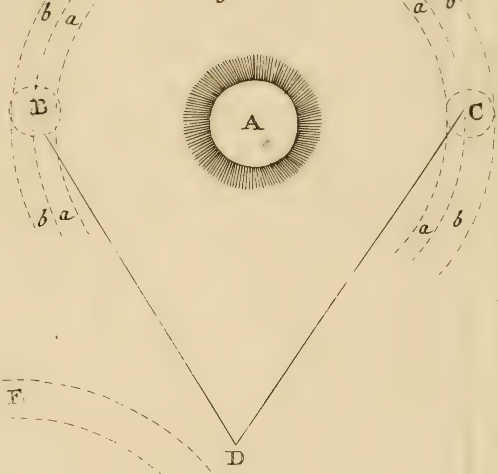


Fig. 3

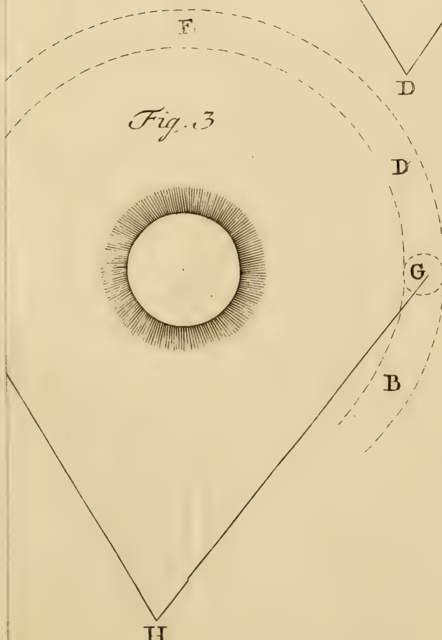


Fig. 1.

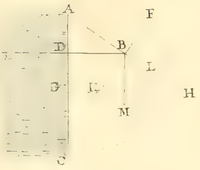


Fig. 2

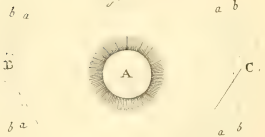
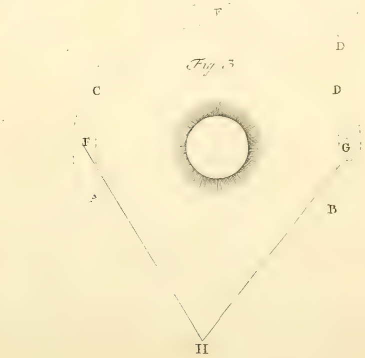


Fig. 3




toto tractu inde a Finmarkia Norvegiae
BIARM
Elivogau
OTVN
GLA


Tabula Geographica
RVSSIAE
vicinarumque Regionum
circiter
A.C.
IↃCCCCXLIX
NORVEGIA
DANI
VARAGIVM
FINLAND
KYRIALAND
BIARM
IØTVN HEIM
GLAESISVELLIR
KIAENOGARD
HOLMGARD
OSTROGARD
EYSTLAND
KVRLAND
LETTO VIA
PRVS
SLAVONIA
RVSSIA
MERIA
MVROMA
MESCHERA
CHEREMIS
BOLGARIA
MORDIA
GARDARIKIA
POLONIA
SIVERIA
MAZARIA
PATZINACIA
CHAZARIA
TVRCIA
ALBA
SERBIA
DALMATIA
SERVIA
BVLGARIA NIGRA
VZIA
ALANIA
ZICHIA
ABASGIA
LAZICA
MARE CASPIVM
TVRKESTAN
PONTVS EVXINVS
Gjudi
Kriwitzi
Viaticzi
Drevliani
Radimitzi
Smolensk
Kiowa
Tmutarakan

Fig. 1

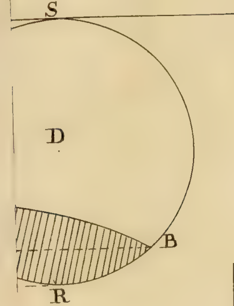


Fig. 3.

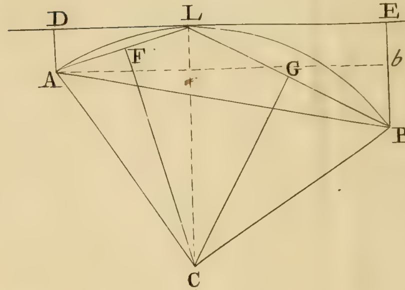


Fig. 2

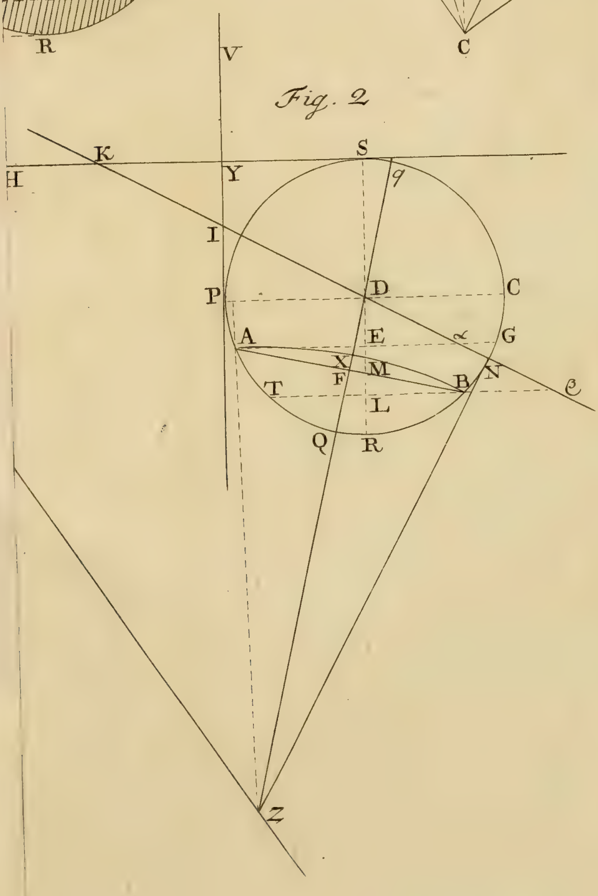


Fig. 1

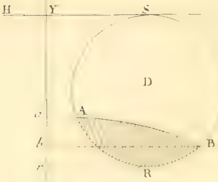


Fig. 3

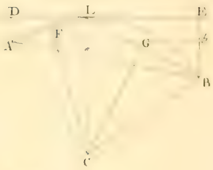
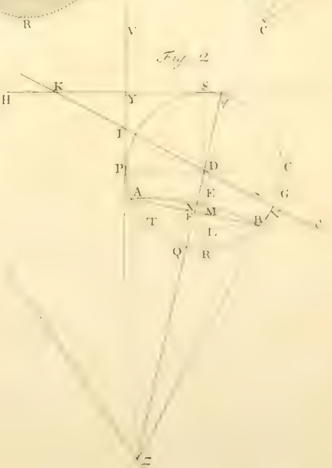


Fig. 2



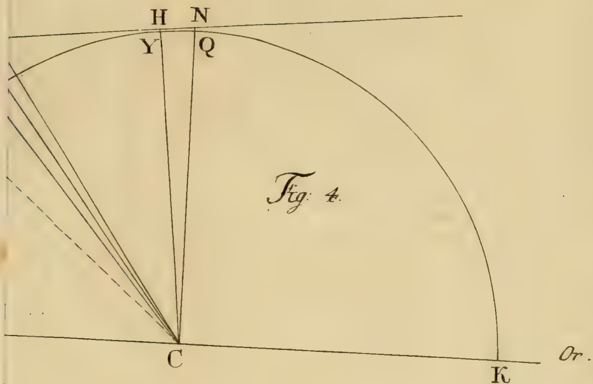


Fig: 4.

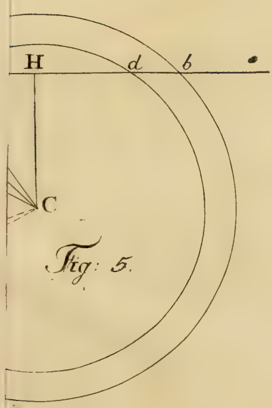


Fig: 5.

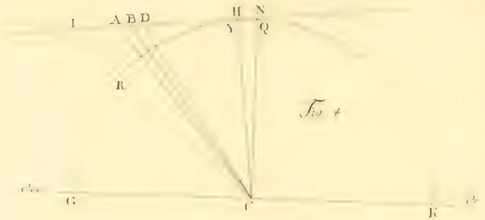


Fig. 4

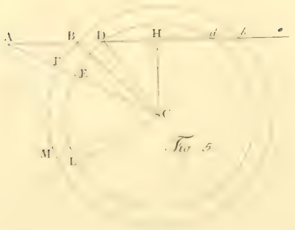


Fig. 5

AMNH LIBRARY
100127237